

حسابان ۲

نهایه فول





فصل ۱ : تابع

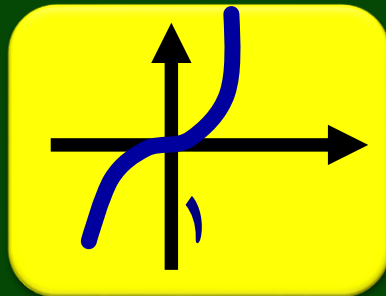
انتقال

بینیم با هریک از اعمال زیر، نمودار تابع $f(x)$ چگونه انتقال می‌یابد :

$$f(x) + k$$

۱

نمودار $f(x)$ را k واحد و در جهت علامت k ، روی محور y ها حرکت بده!



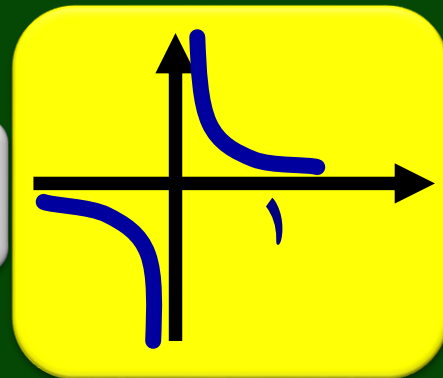
$$y = x^3 - 1$$

ex

$$f(x + k)$$

۲

نمودار $f(x)$ را k واحد در خلاف جهت علامت k ، روی محور x ها حرکت بده!



$$y = \frac{1}{x-1}$$

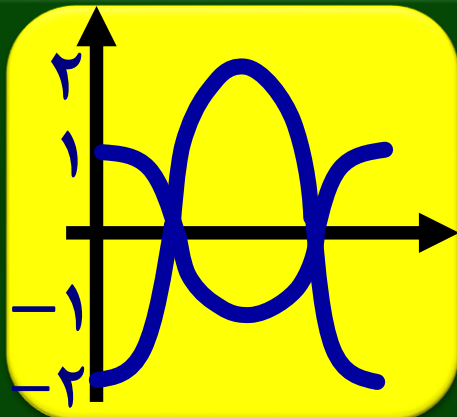
ex

مثال: نمودار تابع $y = -2(x-1)^3 + 1$ را به کمک انتقال رسم کنید.

answer

ex

$$y = -2 \cos x$$

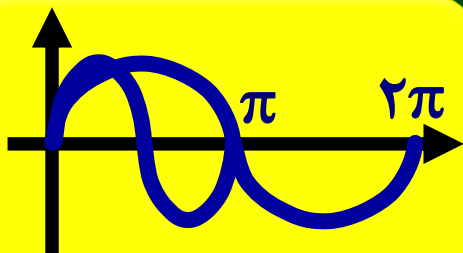


$$kf(x) \quad ۳$$

عرض نقاط روی نمودار $f(x)$ ، k برابر کن (سقف و کف k برابر شه)

ex

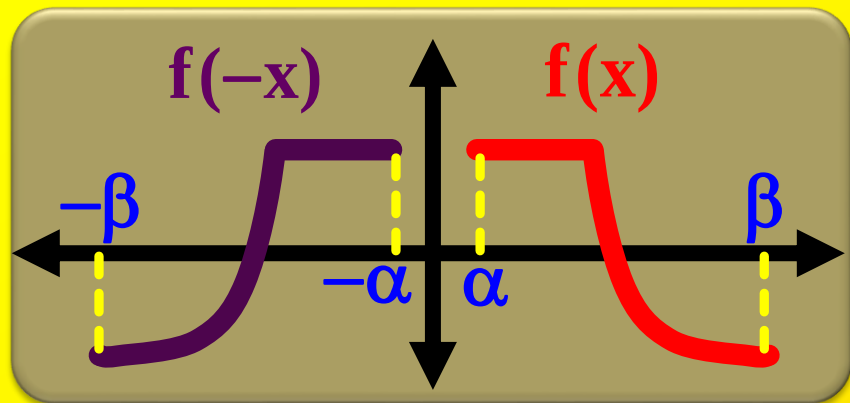
$$y = \sin 2x$$



$$f(kx) \quad ۴$$

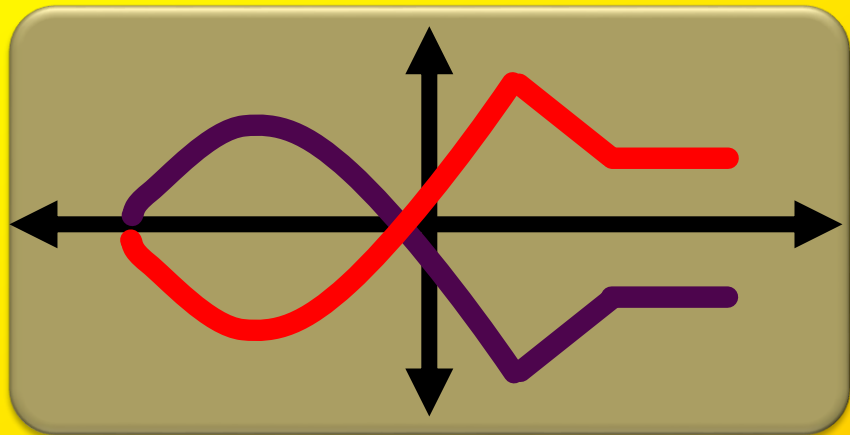
طول نقاط روی نمودار $f(x)$ ، $\frac{1}{k}$ برابر کن (در واقع دامنه $\frac{1}{k}$ برابر شه)

نکته برعکس!



نمودار تابع $f(-x)$ قرینه‌ی نمودار $f(x)$ نسبت به محور y ها است.

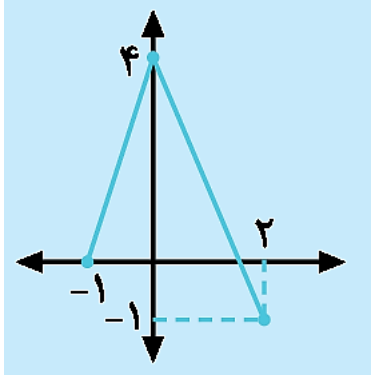
۱



نمودار تابع $-f(x)$ قرینه‌ی نمودار $f(x)$ نسبت به محور x ها است.

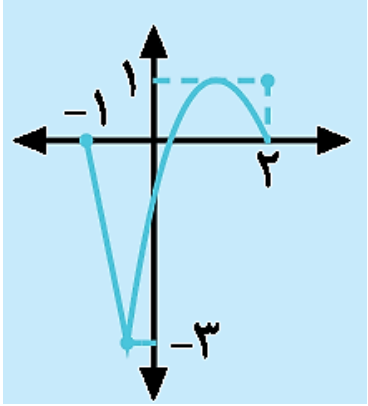
۲

مثال: (مثال کتاب با تغییر) در شکل زیر، نمودار $y = f(x)$ داده شده، به کمک آن نمودار $y = -\frac{1}{2}f(x) + 1$ رسم کنید.



answer

مثال: نمودار تابع g داده شده است. به کمک آن نمودار $g(-\frac{x}{2})$ را رسم کنید.



answer

مثال) (کار در کلاس) الف) نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را با دامنه $[0, 4]$ رسم کنید و برد تابع را مشخص کنید.

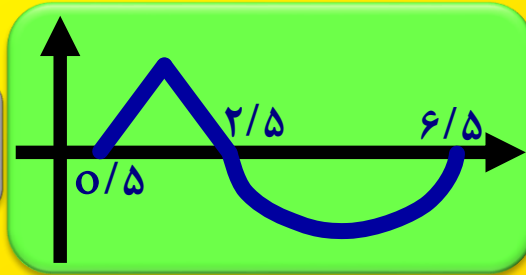
ب) نمودار تابع $k(x) = f(x - 2)$ و $g(x) = f(x) + 3$ را به کمک انتقال رسم کنید و دامنه و بردشان را با f مقایسه کنید.

answer

روش سرهنگیزه‌ی رسم $f(ax+b)$

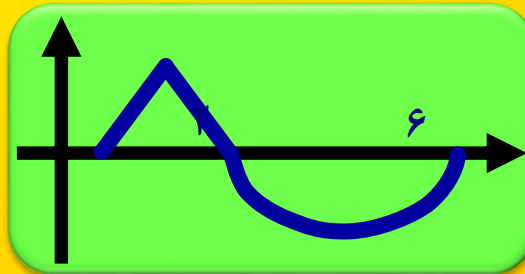
ایکس رو تنها کن و هرکاری داری میکنی تا ایکس تنها شه، دقیقاً همون کارو برای ایکسای نمودار هم انجام بده! دقیقاً همون بلا! نه برعکسش و اینا!

ex نمودار $f(x)$

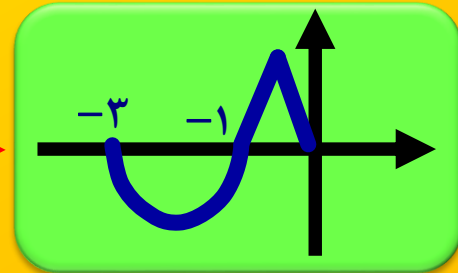


نمودار $f(-2x+0/5)$
را به دست آورید پیلینز :

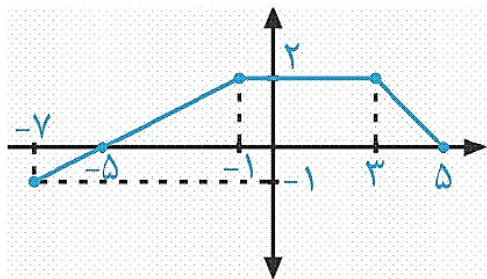
ایکس رو تنها کن
(اول منهای نیم)



$\div (-2)$



مثال) (مثال کتاب درسی) اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، نمودار تابع $g(x) = f(2x+1)$ را به کمک آن رسم کنید.



answer

تابع چند جمله‌ای

توابعی که از جمع و تفریق چند جمله به وجود می‌آیند!

توانی مساوی از ایکس

$$f(x) = \underbrace{ax^n}_{\text{ضربش!}} + bx^{n-1} + \dots + c$$

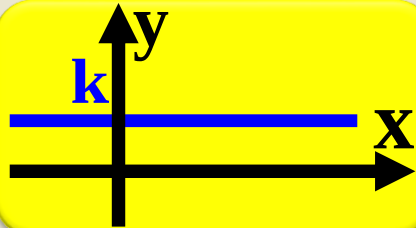
یه جملش!

درجه یک چند جمله‌ای رو
بزرگترین توانش مشخص میکنه!

$$f(x) = -3x^4 + 5x^5 - 3 \xrightarrow{\text{درجه}} 5$$

$$f(x) = 2x^8 - 3x - \frac{1}{x} + 3 \xrightarrow{\text{درجه}} \text{❌}$$

توابع چند جمله‌ای خاص



۱ تابع ثابت ضابطه‌ی آن $y = k$ و نمودارش یک خط افقی است.

$f(x) = (m^3 - 6m^2 + 12m - 8)x^2 - (n^2 - mn - 3)x + \sqrt{-mn}$ تابعی ثابت است. $m+n$ ؛

۲ تابع خطی ضابطه‌ی آن $f(x) = mx + d$ است و نمودارش خطی است با شیب m و عرض از مبدا d .
پُر واضح است که تابع خطی یک چندجمله‌ای از نوع درجه یک می‌باشد.

T

تابع f با ضابطه $f(x) = (a-2)x^2 + bx + c - 2$ بیانگر یک تابع خطی است که در نقطه ای

به عرض ۱- محور عرض ها را قطع کرده است. این تابع در ربع سوم با محورهای مختصات، مثلثی

با مساحت ۲۴ ایجاد کرده است. مقدار b کدام است؟ (۱) $\frac{1}{24}$ (۲) $\frac{1}{48}$ (۳) $-\frac{1}{48}$ (۴) $-\frac{1}{24}$

A

مثال (فعالیت) الف) نمودار تابع $f(x) = x^3$ را از طریق نقطه‌یابی رسم کنید و دامنه و برد آن را بیابید.
ب) به کمک نمودار رسم شده برای تابع $f(x) = x^3$ ، نشان دهید f وارون‌پذیر است.
پ) نمودار f^{-1} و ضابطه آن را به دست آورید.

answer

مثال) کار در کلاس کتاب) نمودار تابع $y = x^3 - 3x^2 + 3x$ را به کمک نمودار تابع $y = x^3$ رسم کنید.

answer

یکنوایی توابع

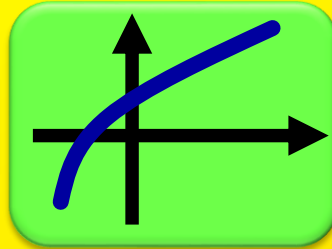
از نظر یکنوایی یک تابع به مدل‌های زیر تبدیل می‌شود :

۱

صعودی اکید

$$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

با افزایش مقدار **x** ، مقدار **y** افزایش می‌یابد



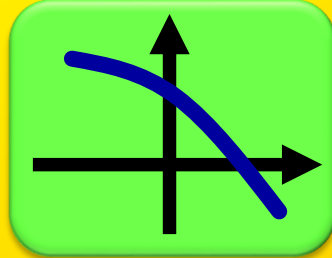
$$f = \{(1, 2), (2, 4), (3, 8)\}$$

۲

نزولی اکید

$$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

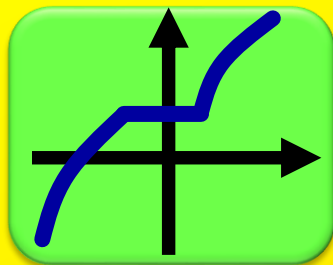
با افزایش مقدار **x** ، مقدار **y** کاهش می‌یابد



$$f = \{(1, 8), (2, 5), (3, 4)\}$$

به توابع نزولی اکید یا صعودی اکید، **یکنوای اکید** (اکیدا یکنوا) می‌گویند.

$$f = \{(1, 2), (2, 2), (3, 8)\}$$



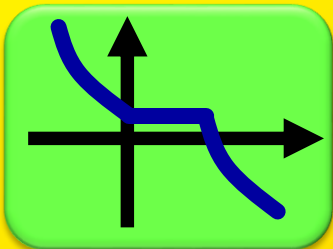
$$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

صعودی

۳

با افزایش مقدار **x**، مقدار **y**
افزایش می‌یابد یا ثابت می‌ماند.

$$f = \{(1, 5), (2, 4), (3, 4)\}$$



$$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

نزولی

۴

با افزایش مقدار **x**، مقدار **y**
کاهش می‌یابد یا ثابت می‌ماند.

به توابع نزولی یا صعودی، **یکنوا** می‌گویند!

به توابعی که نه یکنوا باشند و نه یکنوای اکید، **غیریکنوا** می‌گویند!

بخش پذیری

الگوریتم تقسیم

در تقسیم $f(x)$ بر $g(x)$ داریم:

$$\begin{array}{r} f(x) \\ \hline g(x) \\ \hline q(x) \\ \hline r(x) \end{array}$$

باقیمانده خارج قسمت مقسوم علیه مقسوم

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x)$$

حداکثر n m $n-m$ $m-1$

درجه

ex $3x^3 - 2x + 1 \mid x^2 + 2$

$$ax+b=0 \rightarrow x = \frac{-b}{a} \rightarrow r = f\left(\frac{-b}{a}\right)$$

باقیمانده تقسیم $f(x)$ بر $ax+b$

T اگر عبارت $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 2$ بر $x-1$ بخش پذیر بوده و باقی مانده تقسیم آن بر $2x+2$ ، برابر -12 باشد، مقدار a کدام است؟
 $20(1) \quad 10(2) \quad -20(3) \checkmark \quad -10(4)$

A

آشنایی با ۳ اتحاد چقدر و بدیدن!!

۱- برای n های زوج و فرد داریم: $x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-1})$

ex $x^5 - 32$

ex $x^4 - 1$

۲- برای n های فرد، با تبدیل $a \rightarrow -a$ داریم: $x^n + a^n = (x + a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-1})$

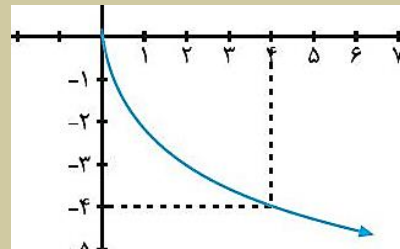
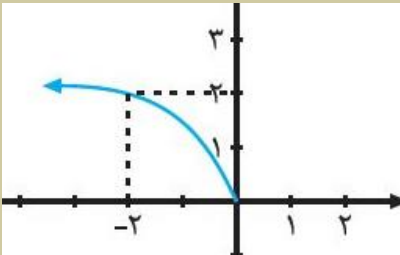
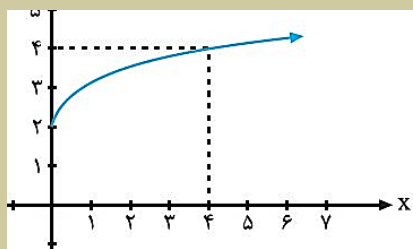
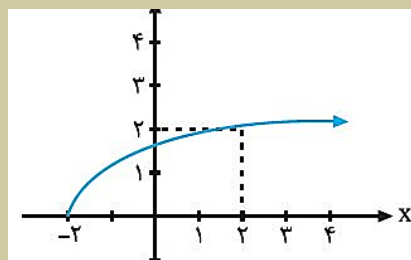
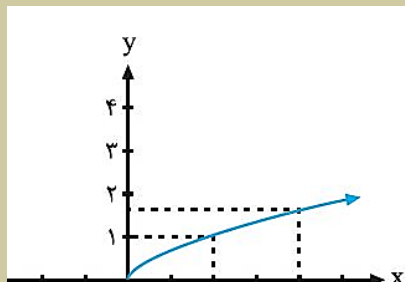
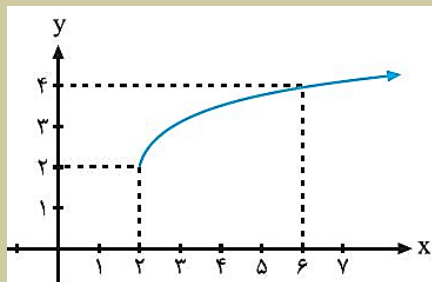
ex $x^5 + 1$

۳- برای n های زوج، با تبدیل $a \rightarrow -a$ داریم: $x^n - a^n = (x + a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots - a^{n-1})$

ex $x^4 - 16$

حل نمونه سوال بیشتر (کتاب + امتحانات گذشته)

(تمرین کتاب) توابع زیر، تبدیل یافته‌ی تابع $y = \sqrt{x}$ هستند. هریک از آن‌ها را به نمودارش نظیر کنید.



الف) $y = \sqrt{2+x}$

ب) $y = 2 + \sqrt{x}$

پ) $y = -2\sqrt{x}$

ت) $y = \sqrt{\frac{x}{2}}$

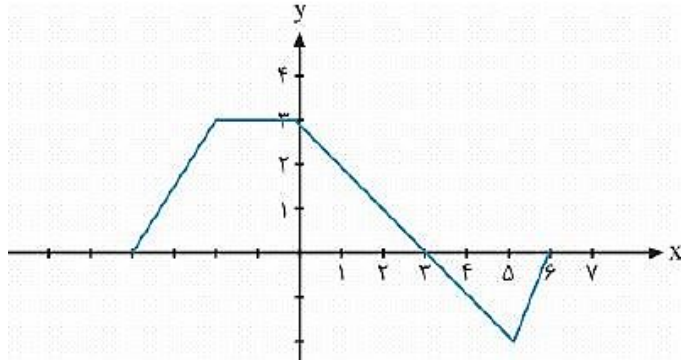
ث) $y = 2 + \sqrt{x-2}$

ج) $y = \sqrt{-2x}$

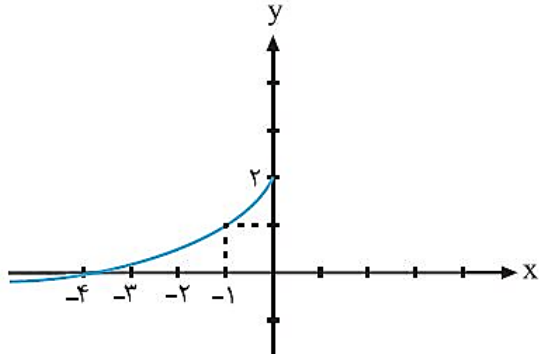
(تمرین کتاب) نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y = 2f(x - 1)$

ب) $y = f(2x - 1)$



(تمرین کتاب) نمودار تابع زیر فقط از قرینه‌یابی و انتقال نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ به دست آمده است. فتابطه‌ی این تابع را بنویسید.



answer

(تمرین کتاب) تابع $f(x) = (x - 2)^3 + 1$ را در نظر بگیرید.

الف) نمودار تابع f را به کمک نمودار تابع $y = x^3$ رسم کنید.

ب) نشان دهید که f وارون پذیر است و نمودار f^{-1} را رسم کنید. پ) ضابطه‌ی f^{-1} را به دست آورید.

answer

(تمرین کتاب درسی) نمودار توابع زیر را رسم کنید. کدام یک از آنها در تمام دامنه‌ی خود اکیداً یکنواست؟

الف) $f(x) = \sqrt{2-x}$ ب) $g(x) = 2^{-x}$

answer

(تمرین کتاب) آیا تابعی وجود دارد که در یک فاصله، هم صعودی و هم نزولی باشد؟

answer

(تمرین کتاب) اگر باقی مانده تقسیم چند جمله ای $x^2 + kx + 2$ بر $x - 2$ برابر 6 باشد، k را تعیین کنید.

answer

(تمرین کتاب) مقدار a و b را طوری تعیین کنید که چند جمله‌ای $x^3 + ax^2 + bx + 1$ بر $x - 2$ و $(x + 1)$ بخش پذیر باشد.

answer

(تمرین کتاب) هر يك از چند جمله‌ای‌های زیر را بر حسب عامل‌های خواسته شده تجزیه کنید.

الف) $x^6 - 1$ با $x - 1$ عامل ب) $x^6 - 1$ با $(x + 1)$ عامل ج) $x^5 + 32$ با $x + 2$ عامل

answer

اگر $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-2} \leq \frac{1}{64}$ عدد x را به دست آورید.

answer

ابتدا نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} (x-2)^3 & x \geq 1 \\ -2 & 0 \leq x < 1 \\ |x+1| & x < 0 \end{cases}$ را رسم کنید، سپس تعیین کنید که این تابع در چه بازه‌ای اکیداً صعودی و در چه بازه‌ای اکیداً نزولی است. **نهایی ۱۴۰۲**

answer

اگر باقی مانده تقسیم چند جمله ای $P(x) = 3x^2 + mx + 2m + 1$ بر $x - 2$ برابر ۳ باشد، باقی مانده تقسیم چند جمله ای $f(x) = mx^2 - mx + 3$ بر $x + 2$ را تعیین کنید. **نهایی ۱۴۰۲**

answer

ریاضیت با من



فصل ۲ :

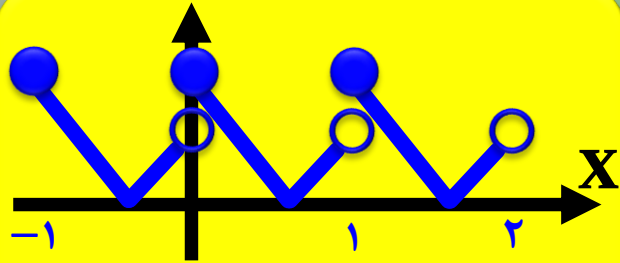
مشقات

[نہا پی فول]

دوره تناوب توابع مثلثاتی

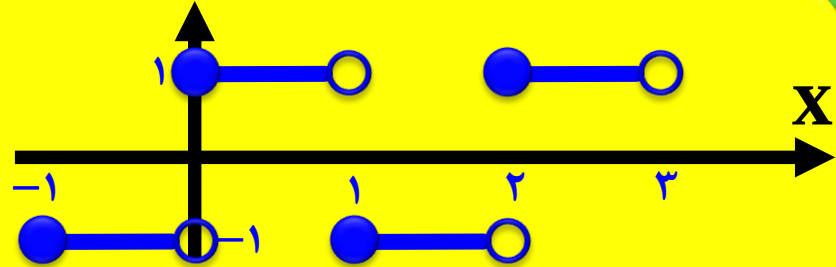
مفهوم دوره تناوب به تابعی که نمودارش به ازای یک طول مشخص تکرار شود، متناوب می‌گوییم. $T \in \mathbb{Q}$

به کوچکترین طولی که نمودار تابع در آن تکرار می‌شود، دوره تناوب آن می‌گوییم و با T نشانش می‌دهیم!



$$T=1$$

$$y = (-1)^{[x]}$$



$$T=2$$

دوره تناوب توابع مثلثاتی

$$k \sin(ax+b)+c$$

$$k \cos(ax+b)+c$$

$$T = \frac{2\pi}{|a|}$$

$$k \tan(ax+b)+c$$

$$k \cot(ax+b)+c$$

$$T = \frac{\pi}{|a|}$$

T دوره تناوب تابع با ضابطه $f(x) = 3 \sin(\frac{x}{4}) - 1$ با دوره تناوب کدام تابع زیر برابر است؟

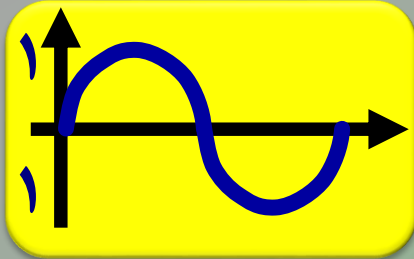
✓ $f(x) = 3 \tan(\frac{x+2}{8}) (2)$ $f(x) = 4 \cos(2x+1) - 4 (1)$

$f(x) = 2 \tan(\frac{x}{4}) - 2 (4)$ $f(x) = \sin(\frac{1-2x}{4}) (3)$

$$y = \sin x$$



توابع مثلثاتی



$$y = \sin x$$
$$x \in [0, 2\pi]$$

$$D_{\sin x} = \mathbb{R}$$

$$R_{\sin x} = [-1, 1]$$

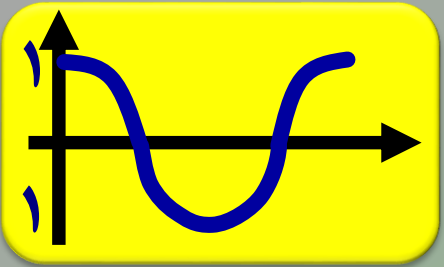
$$EX) y = 2 \sin(\pi x) - 1$$

$$y = k \sin(ax+b) + c$$

$$\max = |k| + c$$

$$\min = -|k| + c$$

$$y = \cos x$$

$$y = \cos x$$

$$x \in [0, 2\pi]$$

$$D_{\cos x} = \mathbb{R}$$

$$R_{\cos x} = [-1, 1]$$

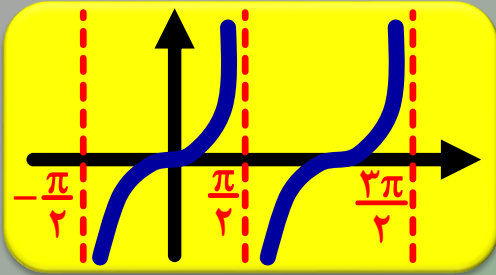
$$EX) y = -\cos\left(-\frac{x}{2}\right) + 1$$

$$y = k \cos(ax + b) + c$$

$$\max = |k| + c$$

$$\min = -|k| + c$$

$$y = \tan x$$



$$D_{\tan x} = \mathbb{R}$$

$$D_{\tan x} : x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$EX) y = \left| \tan\left(\frac{\pi}{2} x\right) \right|$$

مثال (مثال کتاب درسی) دوره تناوب و مقادیر $\max$ و $\min$ هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

الف) $y = 3 \sin(2x) - 2$

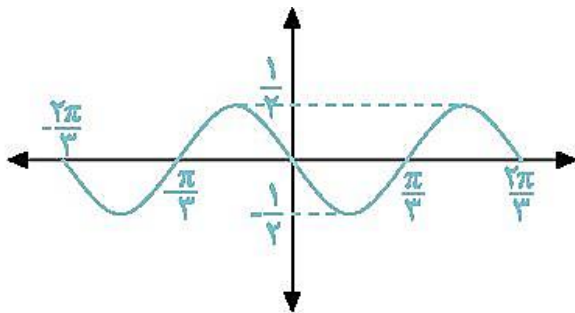
answer

$$y = -\frac{1}{4} \cos(\pi x) \text{ (ب)}$$

answer

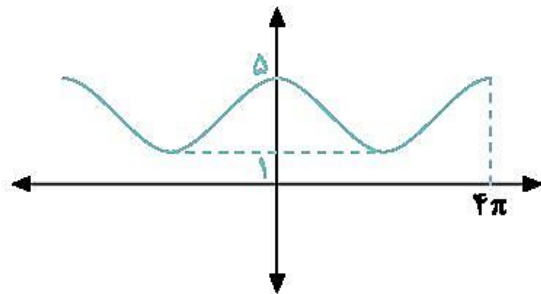
مثال (مثال کتاب) هر یک از نمودارهای زیر مربوط به $y = a \sin bx + C$ یا $y = a \cos bx + C$ است. با تشخیص $\max$ و $\min$ و دوره تناوب، ضابطه هر کدام را مشخص کنید.

الف)



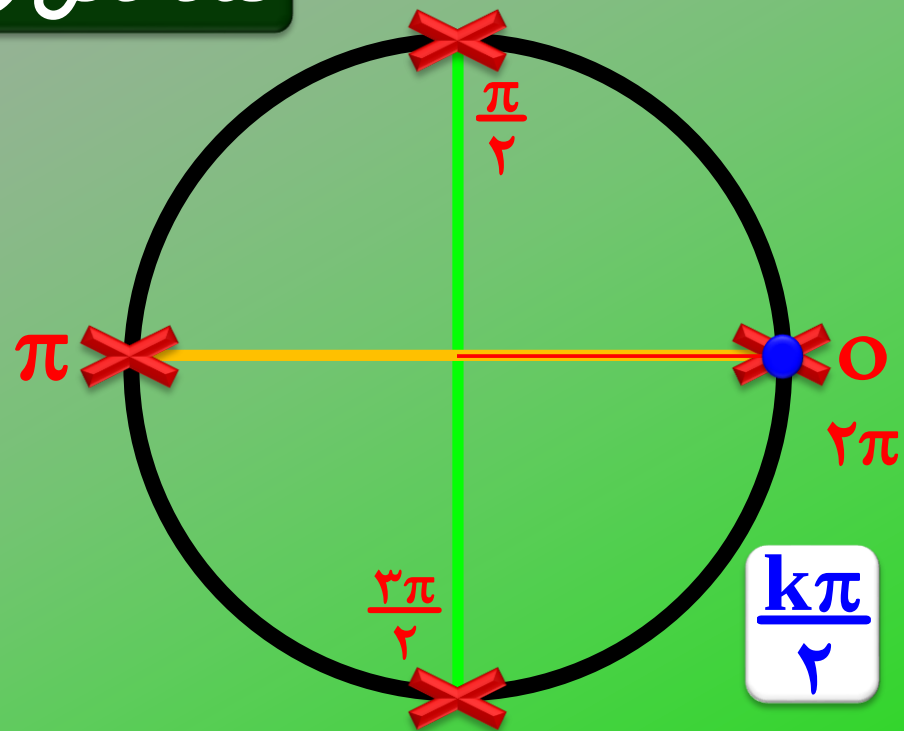
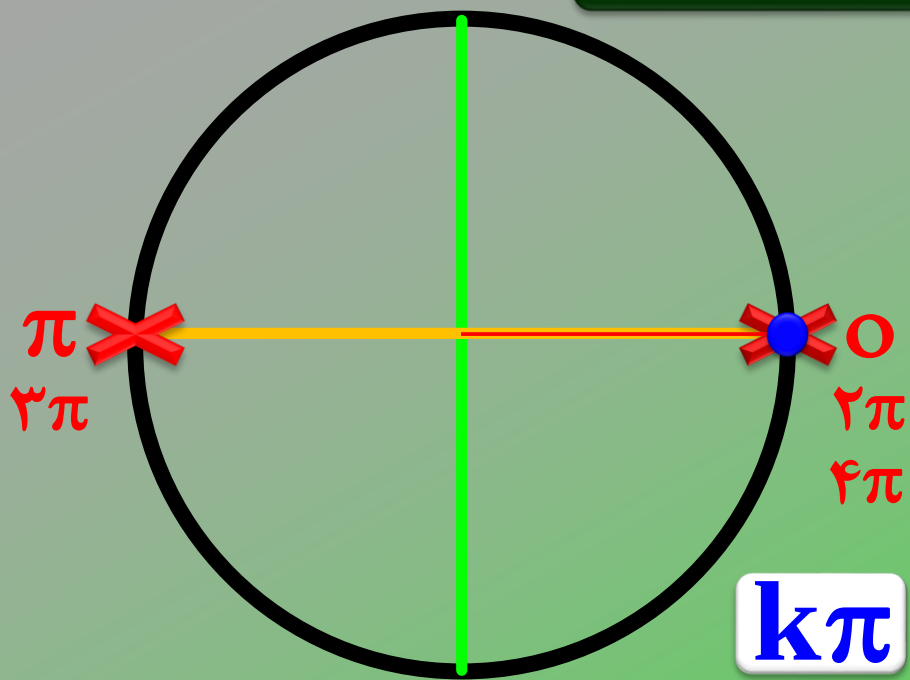
answer

ب)



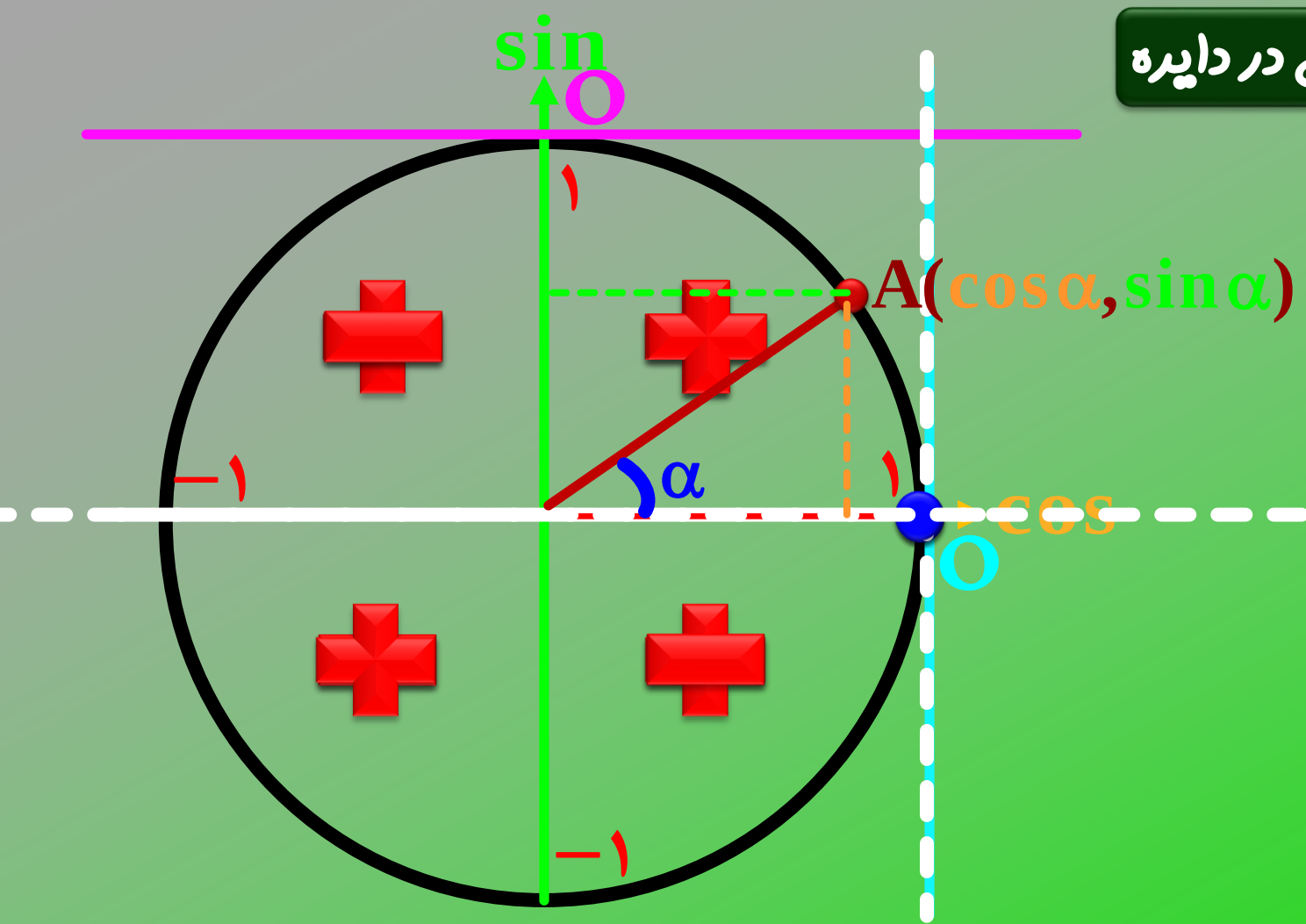
answer

نقاط خاص روی دایره مثلثاتی



$\Rightarrow D_{\tan x} : x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \rightsquigarrow \frac{(فرد)\pi}{2}$
 $D_{\cot x} : x \neq k\pi \rightsquigarrow \frac{(ج)\pi}{2}$

نسبت‌های مثلثاتی در دایره



$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha \begin{cases} \longrightarrow = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ \longrightarrow = 2 \cos^2 \alpha - 1 \\ \longrightarrow = 1 - 2 \sin^2 \alpha \end{cases}$$

مثال: (مثال کتاب) مقدار $\sin 15^\circ$ و $\cos 15^\circ$ را بیابید.

answer

معادلات مثلثاتی

معادلاتی که در آنها مجهول در کمان نسبت مثلثاتی قرار دارد ۳ مدل کلی دارند :

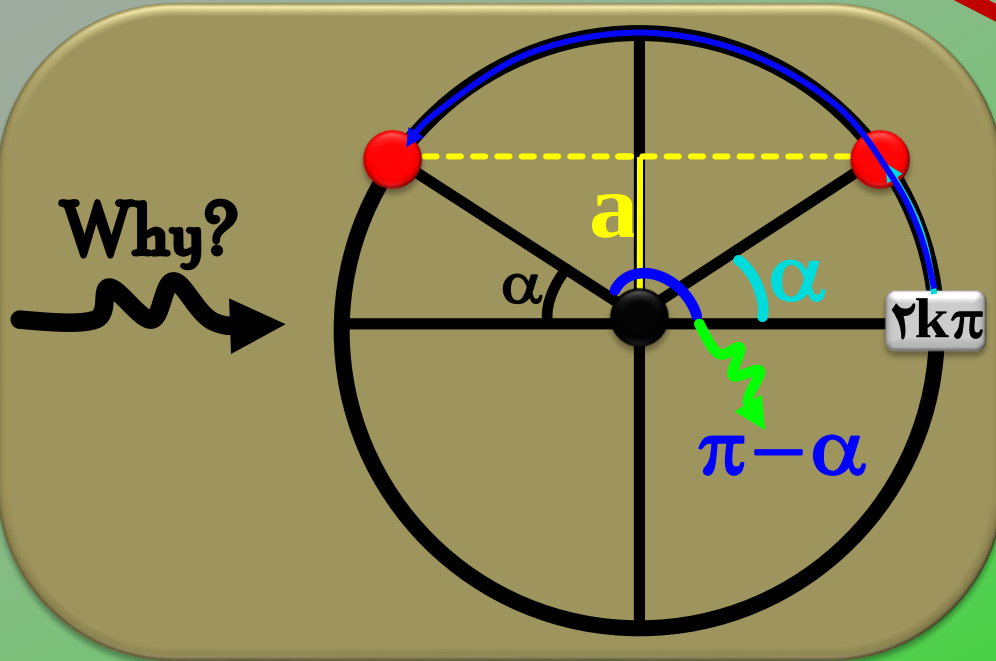


$$\sin x = a = \sin \alpha$$

$$x = 2k\pi + \alpha$$

or

$$x = 2k\pi + \pi - \alpha$$



مثال: (کار در کلاس کتاب) معادلات زیر را حل کنید.

$$\text{الف) } 2\sin x - \sqrt{3} = 0$$

answer

نکته: اگر Sin مساوی یک عدد منفی شد کاری به منفی نداشته باشید، زاویه α را به دست بیاورید بعد منفی را بپذیرید داخل

$$\text{ب) } 4 \text{Sin } x + \sqrt{8} = 0$$

answer

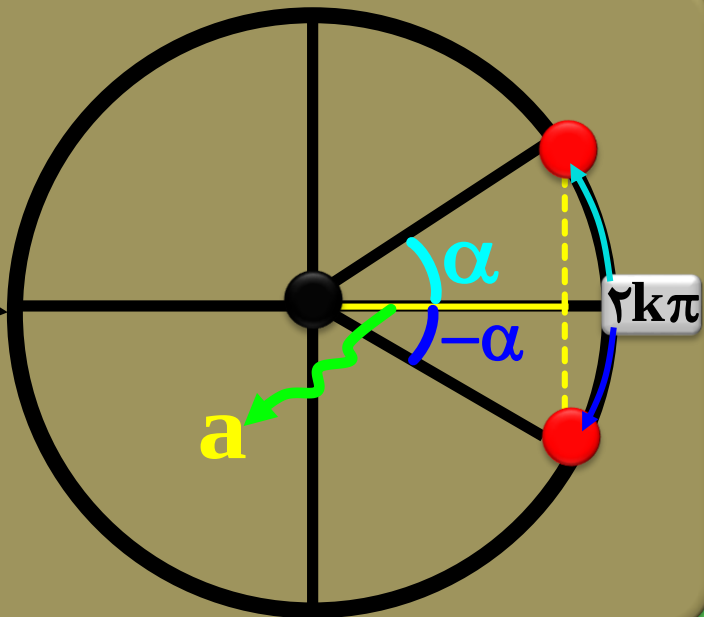


$$\cos x = a = \cos \alpha$$



$$x = \pm k\pi \pm \alpha$$

Why?



$$\pm \cos \pm x - \sqrt{} = 0 \rightarrow x = ?$$

مثال: (مثال کتاب) معادله $\cos x (2 \cos x - 9) = 5$, حل کنید.

answer

نکته: اگر Cos مساوی یک عدد منفی شد، کاری به منفی نداشته باشید و زاویه α را بیابید.

در نهایت جلوی Cos بنویسید. $\pi - \alpha$

$$\text{ex) } \text{Cos}(2x) = -\frac{1}{2}$$

(تمرین کتاب) دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

$$\text{الف) } y = -\pi \sin\left(\frac{x}{2}\right) - 2$$

answer

$$y = -\frac{3}{4} \cos 3x \text{ (ب)}$$

answer

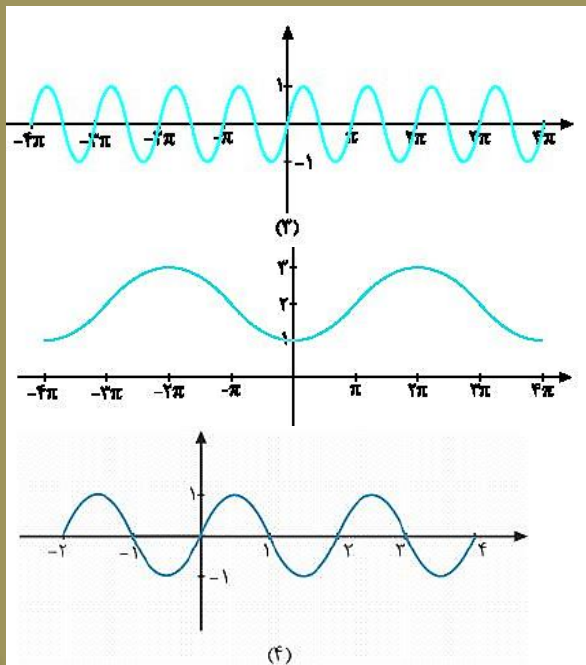
(تمرین کتاب) هر یک از توابع داده شده را به نمودارهای زیر نظیر کنید.

الف) $y = \sin \pi x$

ب) $y = 2 - \cos \frac{1}{2} x$

پ) $y = \sin 2x$

answer



(تمرین کتاب) در هر مورد ضابطه تابعی مثلثاتی با دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم داده شده بنویسید.

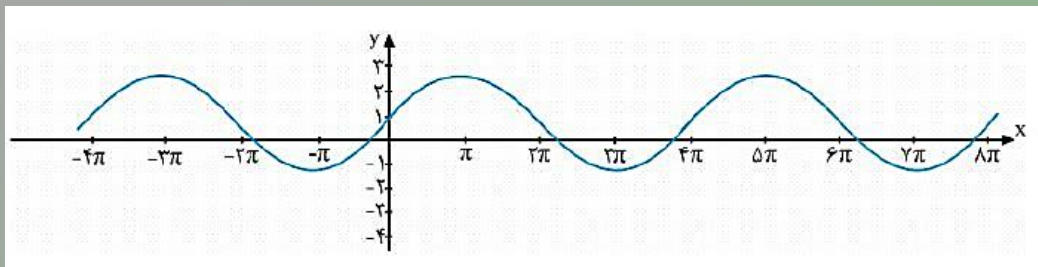
الف) $T = \pi$, $\max = 3$, $\min = -3$

answer

ب) $T = 3$, $\max = 9$, $\min = 3$

answer

(تمرین کتاب) ضابطه مربوط به هر یک از نمودارهای داده شده را بنویسید.



(الف)

answer

(تمرین کتاب) کدام یک از جملات زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف) تابع تانژانت در دامنه‌اش صعودی است.

ب) می‌توان بازه‌ای یافت که تابع تانژانت در آن نزولی باشد.

پ) می‌توان بازه‌ای یافت که تابع تانژانت در آن غیرصعودی باشد.

ت) تابع تانژانت در هر بازه که در آن تعریف شده باشد، صعودی است.

answer

(تمرین کتاب) با توجه به محورهای سینوس و تانژانت، در موارد زیر مقادیر $\sin \alpha$ و $\tan \alpha$ را با هم مقایسه کنید

الف $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

answer

$$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi \quad (\text{ب})$$

answer

(تمرین کتاب) فرض کنید $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ و α زاویه‌ای حاده باشد، حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

الف) $\cos 2\alpha$ ب) $\sin 2\alpha$

answer

(تمرین کتاب) نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس را برای زاویه $5^\circ / 22$ به دست آورید.

answer

(تمرین کتاب) معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\sin \frac{\pi}{2} = \sin 3x$

answer

$$\text{ب) } \cos 2x - \cos x + 1 = 0$$

answer

$$\text{پ) } \cos x = \cos 2x$$

answer

$$\text{ج) } \cos 2x + \sin x = 0$$

answer

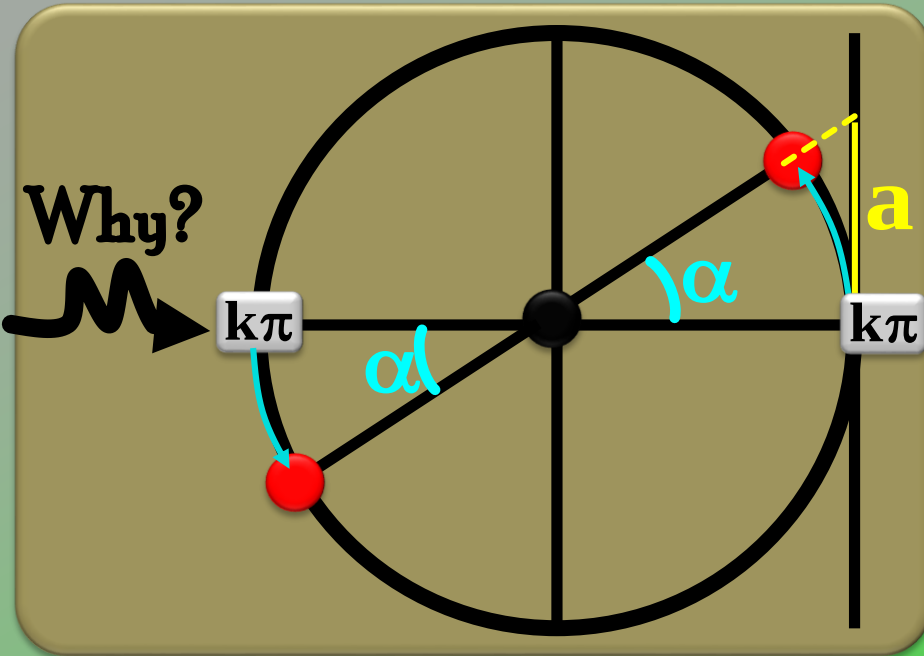
$$\text{ث) } \cos^2 x - \sin x = \frac{1}{4}$$

answer

answer

$$\tan x = a = \tan \alpha$$

$$x = k\pi + \alpha$$

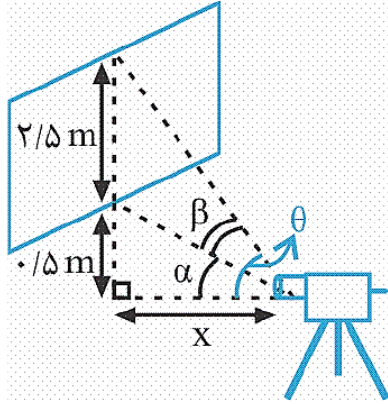


$$\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = \sqrt{3} \rightarrow x = ?$$

مثال : معادله $\tan x = \tan 5x$ را حل کنید.

answer

(مثال) (مثال کتاب) نشان دهید در شکل روبه‌رو، رابطه بین زاویه دید دوربین (β) با فاصله افقی آن تا تابلو نقاشی، به صورت $\tan \beta = \frac{2/5x}{x^2 + 1/5}$ است. سپس زاویه دید را در حالتی که فاصله افقی برابر یک متر است به دست آورید.



answer

نکته: اگر $\tan$ مساوی یک عدد منفی شد کاری به منفی نداشته باشید، زاویه α را به دست بیاورید بعد منفی را بپیرید داخل

مثال: معادله مثلثاتی $\tan^2 x + 2\sqrt{3} \tan x + 3 = 0$ در بازه $[0, 2\pi]$ دارای چند جواب است؟

answer

(تمرین کتاب) معادله زیر را حل کنید.

$$\tan(2x - 1) = 0$$

answer

(تمرین کتاب) معادله زیر را حل کنید.

$$\tan 3x = \tan(\pi x)$$

answer

(تمرین کتاب) مثلثی با مساحت ۳ سانتی متر مربع مفروض است. اگر اندازه دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۶ سانتی متر باشند، آن گاه چند مثلث با این خاصیت ها می توان ساخت؟

answer

ریاضیت با من



فصل ۳ :

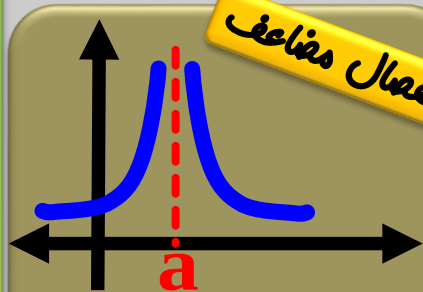
حد

[انہابی فول]

حد نامتناهی (حد پی نهایت)

گاهی وقتی ایکس به یک عدد میل می کند (از یک یا دو طرف)، حاصل عدد به بی نهایت میل می کند! ببینید:

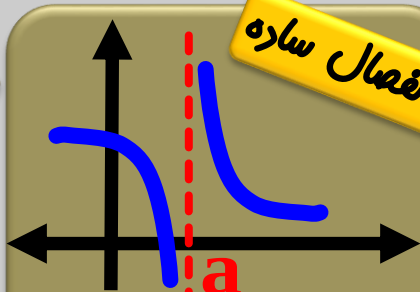
انفصال مضاعف



$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) &= +\infty \end{aligned} \right\}$$

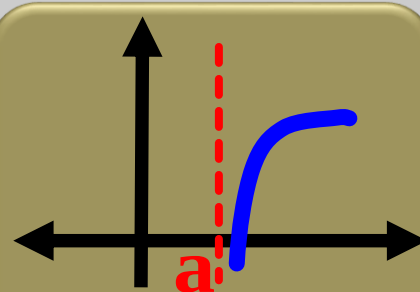
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

انفصال ساده

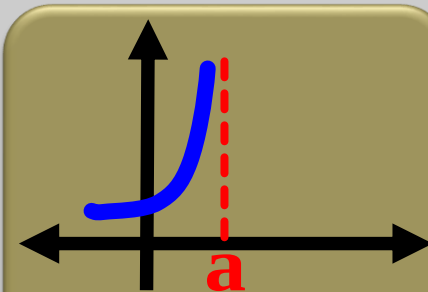


$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$

هر کدام از حدود بالا در a ، به عدد نامتناهی!

خط قائم $x=a$ در هر کدام از نمودارهای بالا یک مجانب قائم برای تابع f می باشد!

مثال: (مثال کتاب) نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x-2}$ را رسم کنید و به وسیله آن، حد چپ و راست این تابع $x=2$ را در بیابید.

answer

توضیح: عدد به روی صفر بی نهایت میشود اما باید صفر مخرج رو تعیین علامت کنید...

مثال (مثال کتاب) حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{\sin x}$ را به دست آورید.

answer

(مثال) (مثال کتاب) حاصل مردهای را به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{4-x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2 + x}{x^2 + 2x + 1}$$

قضیه: آقا عدد به روی بی نهایت می شه صفرا فلاصا

مثال (مثال کتاب) حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(x+1)}{\tan x}$ را به دست آورید.

answer

مثال) (مثال کتاب) حاصل عددهای را به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \sin^2 x}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{x-1} = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x^2 + x}{x^2} \right) = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{x + 2}{(x^2 + 4x + 4)} = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \cos x}{x} = ?$$

answer

مثال (مثال کتاب) کدام یک از فصول $x = -1$ و $x = 3$ مجانب‌های قائم $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x - 3}$ می‌باشند.

answer

مثال (مثال کتاب) نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x+1}{x^3+x}$ در نزدیکی مجانب قائم آن به چه صورتی می باشد؟

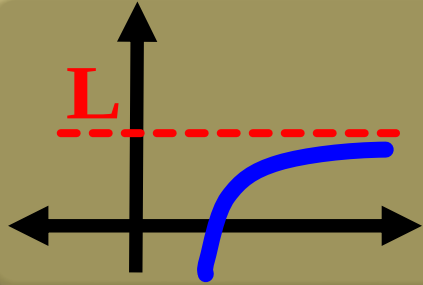
answer

مثال) کار در کلاس با شیطنت من! مجانب‌های قائم تابع $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x - 6}$ را بیابید.

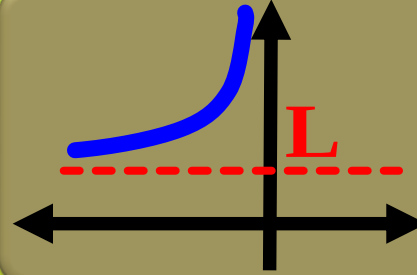
answer

حد در پی نهایت

گاهی وقتی ایکس به $+\infty$ یا $-\infty$ میل میکند، عدد مساوی یک عدد می شود که همان عدد در پی نهایت است!



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

خط افقی $y=L$ در هر کدام از نمودارهای بالا یک مجانب افقی برای تابع f می باشد!

هشدار! شرط لازم برای اینکه بتوانیم عدد در پی نهایت تابعی را حساب کنیم این است که دامنه اش

حداقل از یک طرف بی کران باشد!

ex $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4-x^2}$

هم ارزی پرتوان! وقتی ایکس (پایه) به بی نهایت میل می کند، یک عبارت (که متشکل از جمع

و تفریق چند جمله است) هم ارز جمله ای با بیشترین توان است!

if $x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow 4x^2 - 5x - 7x^3 + 4 \sim -7x^3$

if $x \rightarrow 0 \Rightarrow -2\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{x}\right) \sim -2\left(\frac{1}{x}\right)^2$

if $x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow |x^3 + x| \sim x^3$, $\sqrt[3]{4x^4 - 2x} \sim \sqrt[3]{4x^4}$, $3x^2 + x \sim 3x^2$, $\sqrt{x^2 + x} \sim \sqrt{x^2}$

حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^3 + x^2 + 1}{x^3 + x - 1}$ چقدر از $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{12x + 5}{4x - 3}$ کمتر است؟

5(4

-1(3

-5(2

1(1

A

مثال: (کار در کلاس کتاب) حدود زیر را محاسبه کنید.

(الف)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + 7x^3 - 2x - 9}{3x^2 - 8x + 1}$$

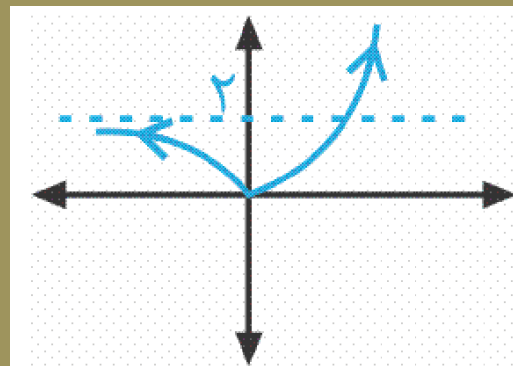
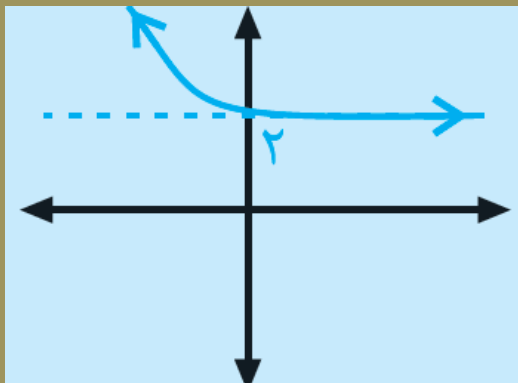
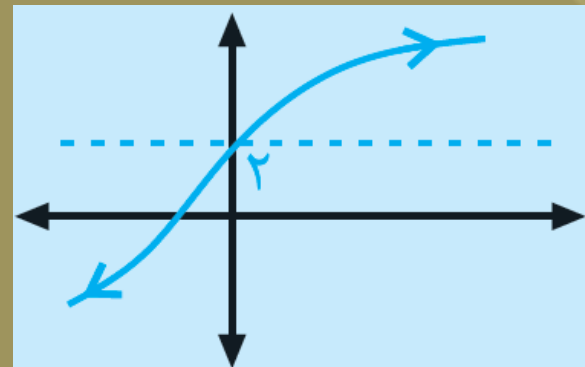
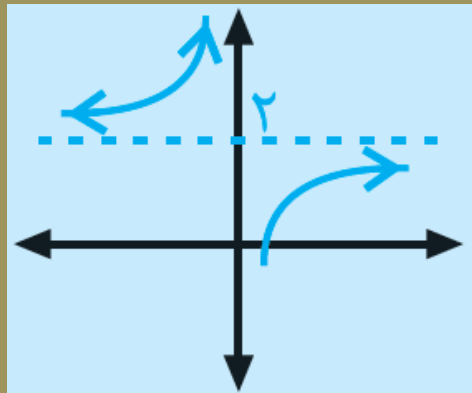
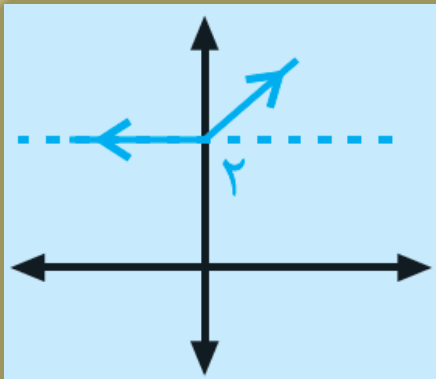
(ب)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x + 4}{x^3 + x - 8}$$

(ج)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^7 + 5x^2}{2x^3 + 9}$$

مثال) کار در کلاس کتاب) کدام یک از نمودارهای توابع زیر مماسب افقی دارند؟



مثال) (مثال کتاب) میانه‌های افقی و قائم تابع $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ را به دست آورید.

answer

مدهای زیر را تعیین کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}$$

(الف)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{|x|}$$

(ب)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1}$$

(پ)

$$\lim_{x \rightarrow -6} \frac{9}{(x+6)^2}$$

(ت)

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1 - 5x}{x^2 - 9}$$

(ث)

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{-3x}{x^2 - 4}$$

(ج)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{\cos x}$$

(د)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x$$

(ع)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x$$

(غ)

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x] - 3}{x - 3}$$

(د)

(تمرین کتاب) نمودار تابعی را رسم کنید که دامنه‌ی آن $\{-1\} - [-2, 2]$ بوده و دارای مماسب قائم باشد.

answer

$$g(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 - x}$$

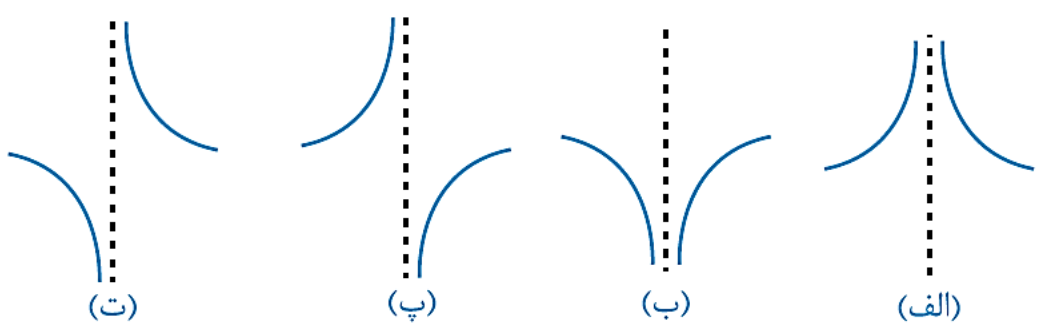
میاناب قائم‌های تابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.

answer

(تمرین کتاب) نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x - |x|}$ در مجاورت مبانی قائم خود چگونه است؟

answer

(تمرین کتاب) کدام شکل وضعیت نمودار تابع $f(x) = \frac{x}{x^2 - 2x + 1}$ را در همسایگی $x = 1$ نشان می‌دهد؟ چرا؟



محدود زیر را مقایسه کنید.

الف)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x - 3}$$

ب)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + 2x - 3}$$

ب)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{1}{x^2}}{\frac{4}{x} - 5}$$

ت)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^5 - 6x^3 - x}{x^2 - 5x + 1}$$

(تمرین کتاب) ممانب‌های افقی و قائم نمودارهای هر یک از توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید:

$$\text{الف) } y = \frac{2x - 1}{x - 3}$$

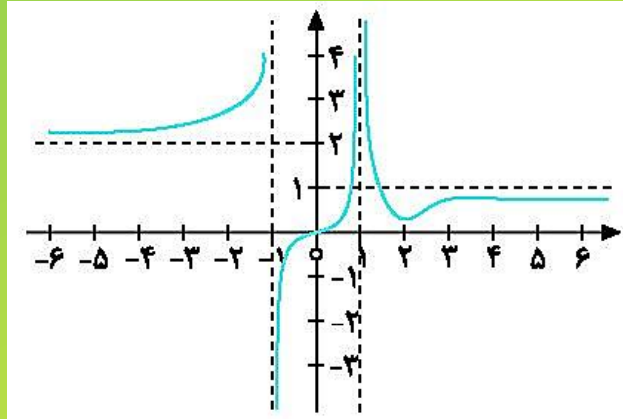
answer

$$b) y = \frac{x}{x^2 - 4}$$

$$p)y = \frac{1+x^2}{1-x^2}$$

$$c) y = \frac{2x}{1+x^2}$$

(تمرین کتاب) نمودار تابع آبه شکل زیر است. ورود خواسته شده را بنویسید.



$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x)$$

(ب)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

(الف)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

(ت)

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$$

(پ)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

(ج)

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

(ث)

رياضيت يا من

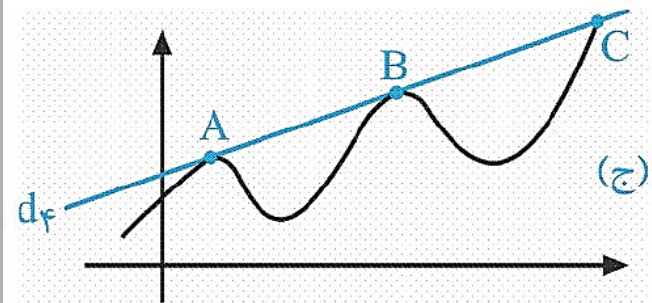
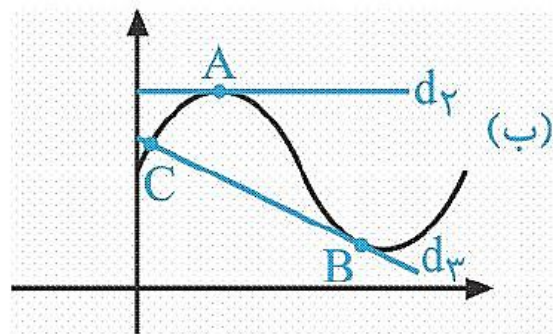
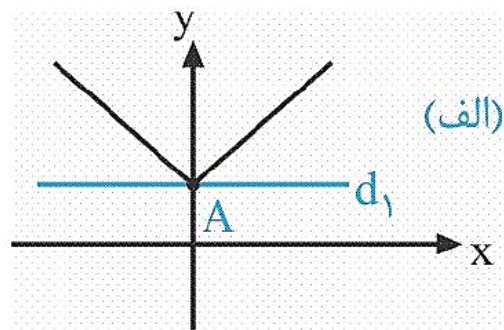


فصل ۴ :

مشق

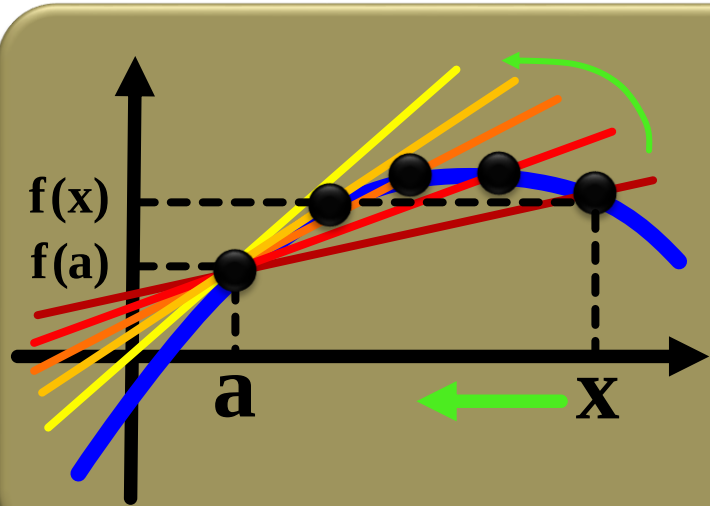
[نہایی فول]

خط مماس بر یک منحنی به روایت تصویری!



مفهوم مشتق

مشتق تابع در a همان شیب خط مماس بر نمودار تابع در a می باشد.



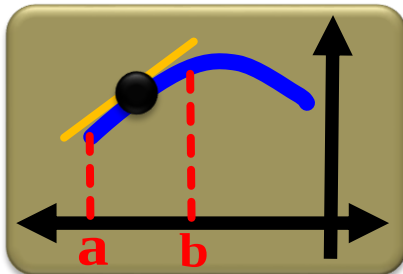
$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

تعریف دیگرش

$$x - a = h \rightarrow f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

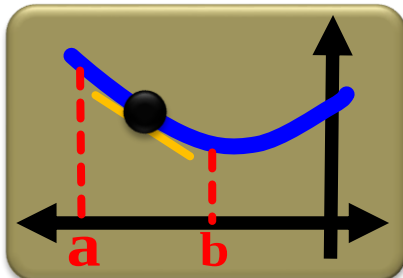
مثال: (مثال کتاب) معادله خط مماس بر منحنی $y = -x^2 + 10x$ را در نقطه‌ای به طول $x = 2$ واقع بر منحنی بیابید.

علامت مشتق



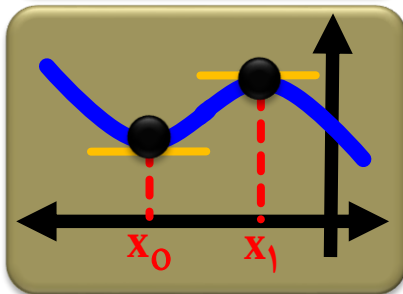
اگر در یک بازه تابع f صعودی آید باشد،
در آن بازه علامت مشتق مثبت است.

$$f' > 0$$



اگر در یک بازه تابع f نزولی آید باشد،
در آن بازه علامت مشتق منفی است.

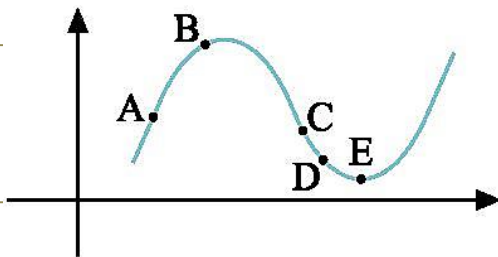
$$f' < 0$$



در قله یا قعر نمودار تابع، خط مماس افقی
و در نتیجه مقدار مشتق آنجا صفر است.

$$f' = 0$$

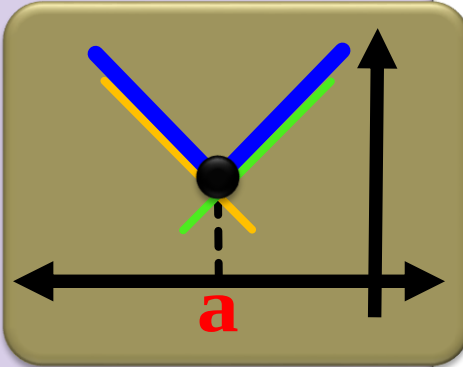
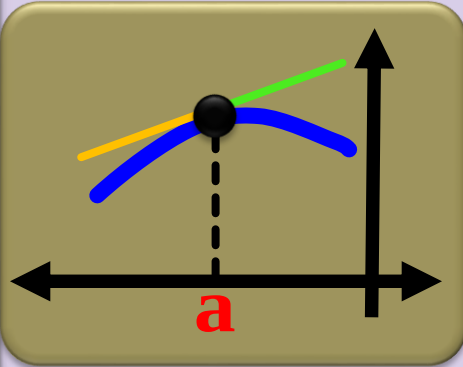
مثال: فرض کنید شیب نقاط مشخص شده در منفی زیر، -5 ، -1 ، 0 ، 2 ، 4 هستند. مشخص کنید کدام شیب مربوط به کدام نقطه است؟



شیب نیم مماس چپ

$$f'_{-}(a) = \lim_{x \rightarrow a^{-}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

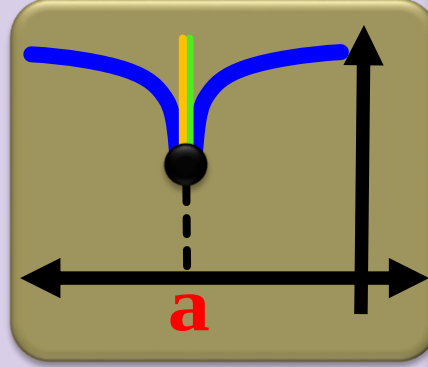
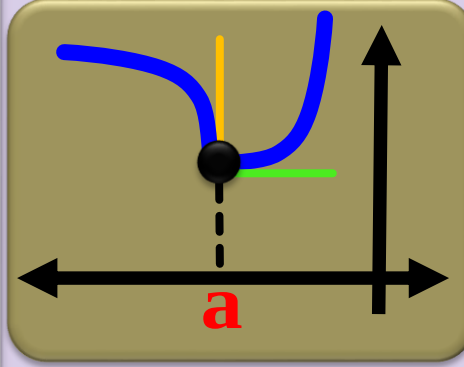
$$f'_{-}(a) = \lim_{h \rightarrow 0^{-}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$



شیب نیم مماس راست

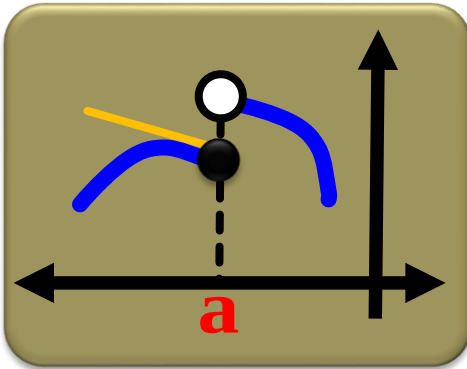
$$f'_{+}(a) = \lim_{x \rightarrow a^{+}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$f'_{+}(a) = \lim_{h \rightarrow 0^{+}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

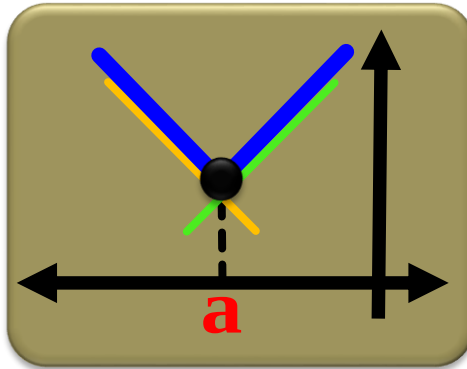


شرط مشتق پذیری f در $x=a$ زمانی یک تابع در یک نقطه مشتق پذیر است که بتوان

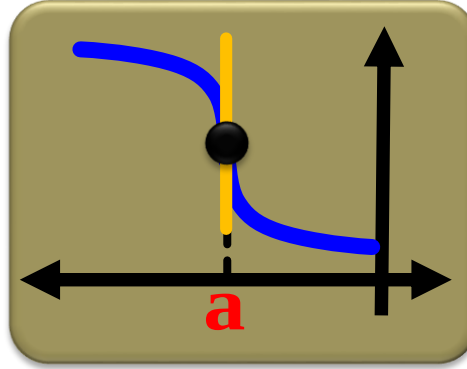
در آن نقطه بر نمودارش یک خط مماس غیر قائم رسم کرد (مماس ی تیکه‌ا)



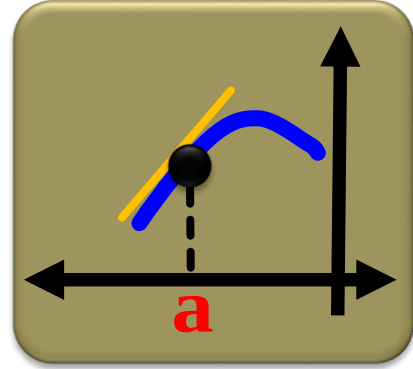
مشکل؟



مشکل؟



مشکل؟



Ok:)

پس شرط مشتق پذیری f در a می شود :

باید مشتق چپ و راست برابر باشند.

۲

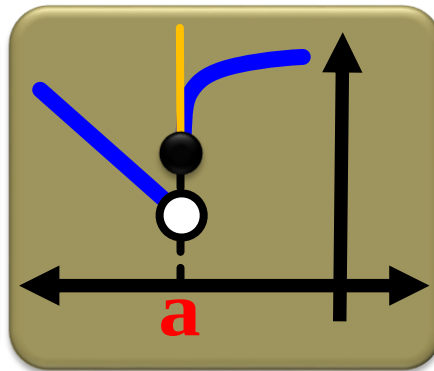
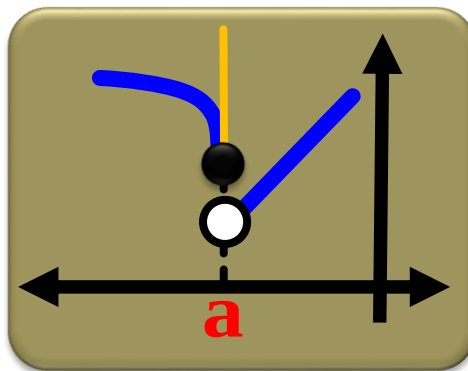
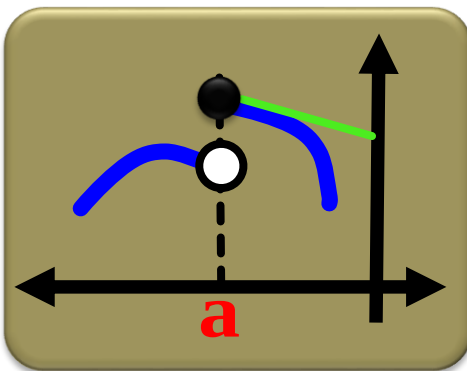
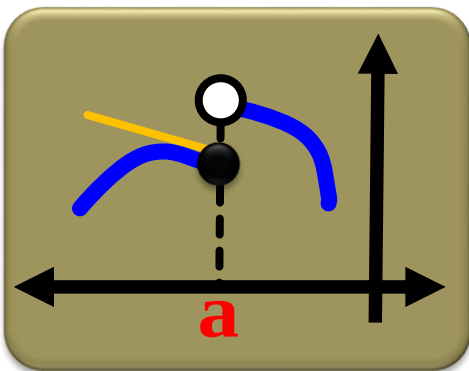
باید تابع در این نقطه پیوسته باشد.

۱

توجه

شرط لازم برای وجود مشتق، راست/چپ (شیب نیم‌مماس، راست/چپ) این است که تابع

در آن نقطه از راست/چپ پیوسته باشد.



کلاً خواست باشد از نقطه توغالی نه میشه مماس رسم کرد، نه نیم‌مماس!

توجه

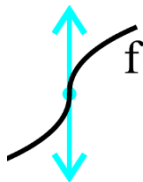
یکی از مهم‌ترین کانندهای مشتق‌ناپذیری، نقاط مرزی در توابع چندضابطه‌ای هستند.

مثال: (مثال کتاب) مشتق پذیری تابع $f(x) = |x^2 - 1|$ را در $x = 1$ بررسی کنید.

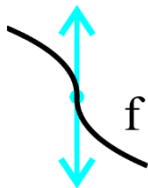
مثال: (مثال کتاب) مشتق‌پذیری توابع $f(x) = [x]$ و $g(x) = \sqrt{x}$ را در صفر بررسی کنید.

مماس قائم

اگر f در $x = a$ پیوسته باشد و $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ هر دو $+\infty$ یا هر دو $-\infty$ شوند، f در a مشتق پذیر نیست، اما خط مماس در این نقطه موجود است، که به آن مماس قائم می‌گویند.



$$f'_-(a) = f'_+(a) = +\infty \quad (\text{مثبت شد چون صعودی است})$$



$$f'_-(a) = f'_+(a) = -\infty \quad (\text{منفی شد چون نزولی است})$$

مثال: (مثال کتاب) آیا تابع $y = \sqrt[3]{x}$ در $\mathbf{X} = \mathbf{0}$ دارای فط مماس است؟

مثال: آیا تابع $y = \sqrt[3]{x^2}$ در $x = 0$ دارای فط مماس است؟

تابع مشتق $(f'(x))$

برابر است با $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ مشروط بر آن که این حد موجود باشد. مجموعه تمام نقاطی از دامنه f که f' برای آن‌ها موجود باشد را $D_{f'}$ می‌گوییم.

مثال (مثال کتاب) اگر $f(x) = \frac{1}{x}$ ، تابع مشتق و دامنه آن را به دست آورید. سپس $f'(3)$ را بیابید.

مشتق گیری! (صفر تا صد) چند فرمول مشتق گیری مشتی بینیم صفا کنیم!

۱ $y = a (a \in \mathbb{R}) \rightarrow y' = 0$

۲ $y = a x \rightarrow y' = a$

۳ $y = a \Delta^n \rightarrow y' = a n (\Delta)^{n-1} \cdot \Delta'$

رمز

• نما در ضرب ضرب همیشه!
• یکی از نما کم همیشه!
• در مشتق پایه ضرب همیشه!

ex $y = \frac{-2}{x^4}$

ex $y = \frac{1}{5} (-5x)^{12}$

۴ $y = f \pm g \pm \dots \rightarrow y' = f' \pm g' \pm \dots$

۵ $y = f \cdot g \rightarrow y' = f' \cdot g + g' \cdot f$

ex $y = \frac{6}{x^3} - x^2 \sqrt[3]{x} + 4x$



$$y = \sqrt{\Delta}$$



$$y' = \frac{\Delta'}{2\sqrt{\Delta}}$$



$$y = \frac{f}{g}$$



$$y' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

ex

$$y = \frac{(2x-1)\sqrt{x}}{x^3}$$

T تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{3x+a}{x-1} & x \geq 2 \\ x^2+ax+b & x < 2 \end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ مشتق پذیر است. مقدار b کدام است؟

$$-\frac{3}{2}(4)$$

$$-\frac{11}{2}(3)$$

$$\frac{3}{2}(2)$$

$$\frac{11}{2}(1) \checkmark$$

مشتق تابع مرکب

بفوانید : مشتقِ داخلش در اِف پریم داخلش! تمام :

$$y = f(\Delta) \longrightarrow y = \Delta' \cdot f'(\Delta)$$

اگر T $f(x) = \frac{x^3 - 2}{1 + x^3}$, $g(x) = \sqrt[3]{x-1}$, حاصل $f'(g(x)) \times g'(x)$ کدام است؟ (کنکور ۹۲)

$$\frac{x-3}{x^3} (4)$$

$$\frac{1}{3x} (3)$$

$$\frac{3}{x^2} (2)$$

$$\frac{2}{x} (1)$$

مثال: اگر $f(x) = \sqrt{-2x}$ و $g(x) = (2x+1)^2$ ، آنگاه مشتق تابع $g \circ f(x)$ در $x = -2$ را با استفاده از قاعده زنجیری به دست بیاورید.

مثال: کار در کلاس) مشتق‌های توابع زیر را به دست آورید.

$$f(x) = (x^2 + 1)^3 (5x - 1)$$

$$g(x) = \left(\frac{-3x - 1}{x^2 + 5} \right)^8$$

شرط مشتق پذیری روی بازه

① f در تمامی نقطه‌های موجود در بازه‌ی (a, b) پیوسته است. ② f در تک‌تک نقطه‌های این بازه هم، مشتق پذیر است. این جوری هم ببین: تابع f در بازه‌ی (a, b) هیچ نقطه‌ی ناپیوسته و مشتق ناپذیری ندارد...!	مشتق پذیری f روی (a, b)
① f در (a, b) مشتق پذیر است. ② f در $x = a$ مشتق راست دارد (و البته پیوستگی راست!)	مشتق پذیری f روی $[a, b)$
① f در (a, b) مشتق پذیر است. ② f در $x = b$ مشتق چپ دارد (و البته لازم است که پیوستگی چپ هم داشته باشد...!)	مشتق پذیری f روی $(a, b]$
① f در (a, b) مشتق پذیر است. ② f در $x = a$ مشتق راست دارد (و البته پیوستگی راست!) ③ f در $x = b$ مشتق چپ دارد (و البته پیوستگی چپ!)	مشتق پذیری f روی $[a, b]$

مثال : (مثال کتاب) نمودار $f(x) = \begin{cases} x^2 & -2 \leq x \leq 1 \\ x+1 & x > 1 \end{cases}$ را رسم کنید و مشتق پذیری آن را روی بازه‌های $[-2, 1]$ ، $(1, +\infty)$ و $[1, 2]$ بررسی کنید.

مشتق مرتبه دوم

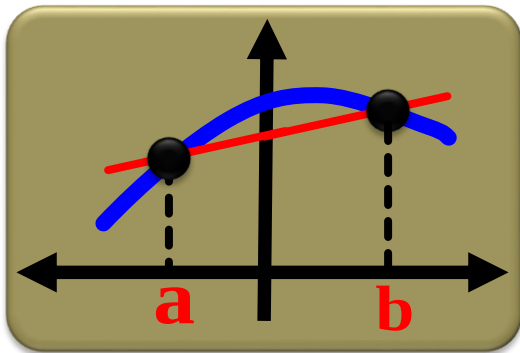
اگر تابع مشتق، مشتق پذیر باشد، مشتق مرتبه دوم $y = f(x)$ را به صورت $y'' = f''(x)$ (خوانده شود ایگرگ زکوند) می نویسیم و برای مناسبه آن از تابع y' مشتق می گیریم.

مثال: (مثال کتاب) اگر $y = 3x^4 + 2x^2 - 1$ ، آنگاه تابع y' و y'' را بیابید.

آهنگ تغییر متوسط

آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازه‌ی $[a, b]$ همان شیب خط

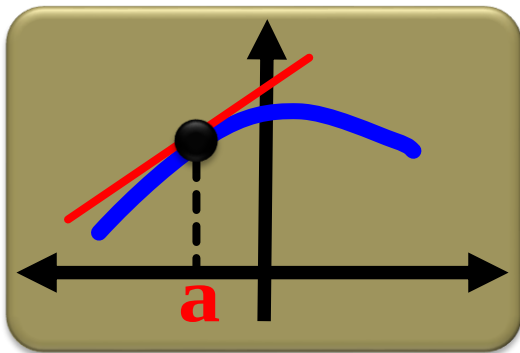
واصل نقاط سروته بازه است!



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

آهنگ تغییر لحظه‌ای

آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در نقطه‌ی $x = a$ همان شیب خط مماس بر نمودارش در a است.



$$f'(a)$$

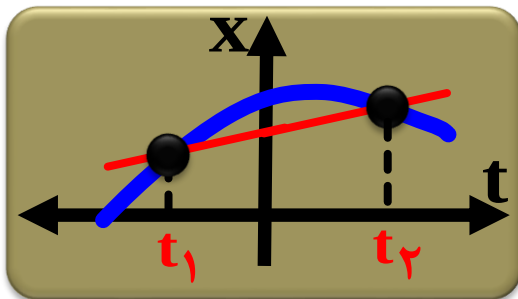
مثال: (مثال کتاب) تابع $f(x) = 7\sqrt{x} + 50$ قد متوسط کودکان، x ماه پس از تولد، بر حسب $\frac{\text{cm}}{\text{month}}$

مشخص می‌کند. آهنگ متوسط رشد یک کودک، x از ۱ ماهگی تا ۳۶ ماهگی بیابید.

سرعت متوسط

میدانیم (ایشالا!) که سرعت متوسط می شود نسبت جابجایی به زمان.

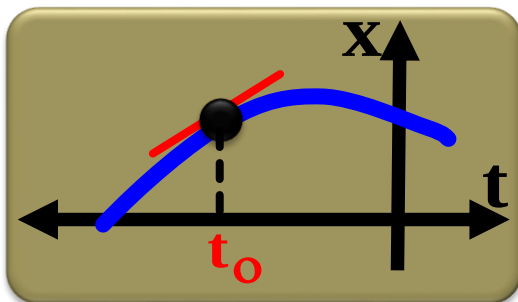
پس در اینجا با تابع $(y = x(t))$ و نمودار مکان بر حسب زمان سروکار داریم!



$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

سرعت لحظه‌ای

باید بدانید که تابع سرعت، مشتق تابع مکان-زمان است!



$$v(t_0) = x'(t_0)$$

مثال: (مثال کتاب با تغییر) رابطه $h(t) = -5t^2 + 40t$ ، ارتفاع جسم $h(t)$ را t ثانیه پس از پرتاب از سطح زمین نشان می‌دهد.

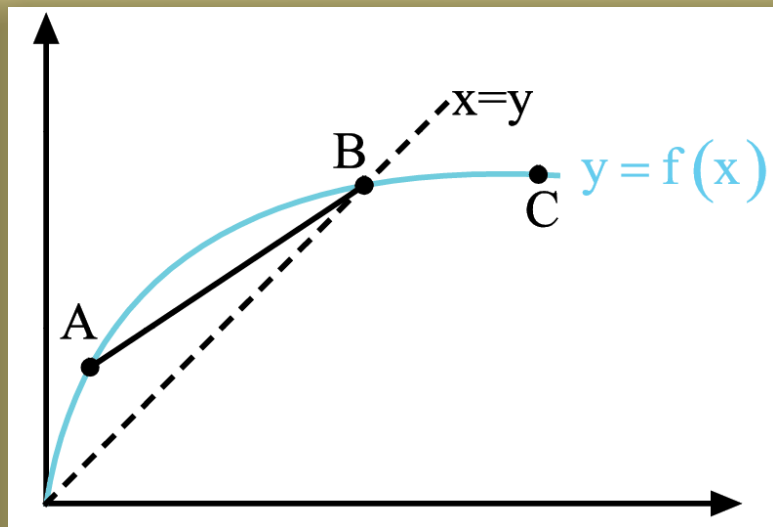
الف) سرعت متوسط جسم در بازه زمانی $[0, 2]$ را بر حسب $\frac{m}{s}$ به دست آورید.

ب) سرعت لحظه‌ای جسم در لحظه $t = 2$ مقدار است؟

ج) جسم چند ثانیه پس از پرتاب، به نقطه اوج می‌رسد؟

(تمرین کتاب) اگر $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ ، $f'(2)$ را به دست آورید و معادله خط مماس بر منحنی f را در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن بنویسید.

(تمرین کتاب) برای نمودار $y = f(x)$ ، شیب‌های داده شده از «الف» تا «ج» را از کوچک‌ترین به بزرگ‌ترین مرتب کنید.



الف) $m_1 \leftarrow$ شیب نمودار در نقطه A

ب) $m_2 \leftarrow$ شیب نمودار در نقطه B

پ) $m_3 \leftarrow$ شیب نمودار در نقطه C

ت) $m_4 \leftarrow$ شیب خط AB

ث) $m_5 \leftarrow$ شیب خط

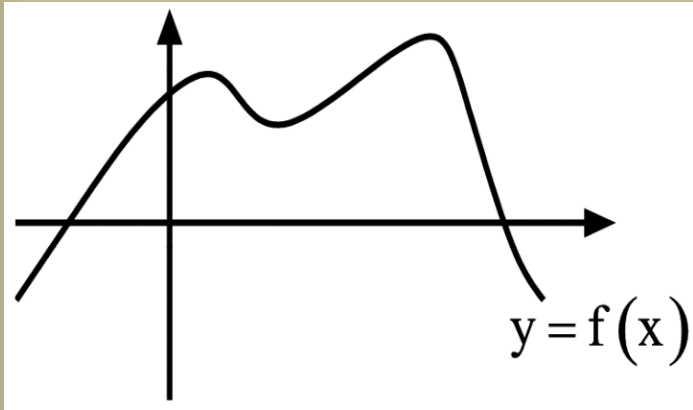
ج) $m_6 \leftarrow$ شیب خط

(تمرین کتاب) نقاطی مانند **A, B, C, D, E, F** و **G** را روی نمودار $y = f(x)$ مشخص کنید به طوری که:

الف) **A** نقطه‌ای روی نمودار است که شیب خط مماس بر نمودار در آن منفی است.

ب) **B** نقطه‌ای روی نمودار تابع است که مقدار تابع و مقدار مشتق در آن منفی است.

پ) **C** نقطه‌ای روی نمودار است که مقدار تابع در آن‌جا صفر است ولی مقدار مشتق در آن مثبت است.

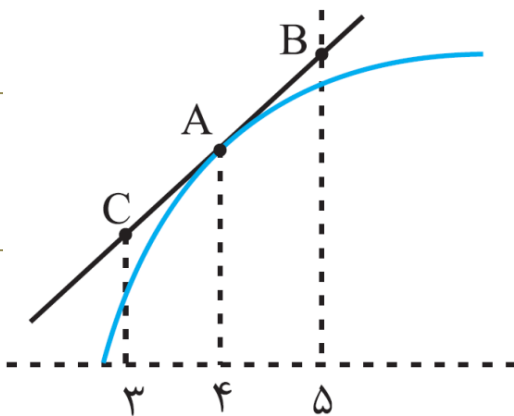


ت) **D** نقطه‌ای روی منحنی است که مشتق در آن‌جا صفر است.

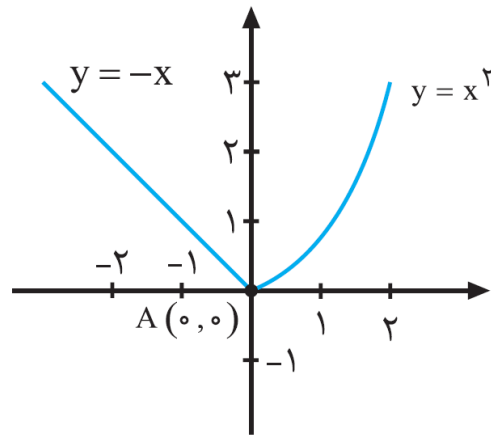
ث) نقاط **E** و **F**، نقاط متفاوتی روی منحنی هستند که مشتق یکسان دارند.

ج) **G** نقطه‌ای روی منحنی است که مقدار تابع در آن‌جا مثبت ولی مقدار مشتق منفی است.

(تمرین کتاب) برای تابع f در شکل روبه‌رو داریم: $f'(4) = 1/5$ و $f(4) = 25$. با توجه به شکل، مفتصات نقاط A و B و C را بیابید.



(تمرین کتاب) با معادله مشتق راست و مشتق چپ تابع داده شده در نقطه **A**، نشان دهید که این تابع در نقطه **A** مشتق پذیر نیستند.

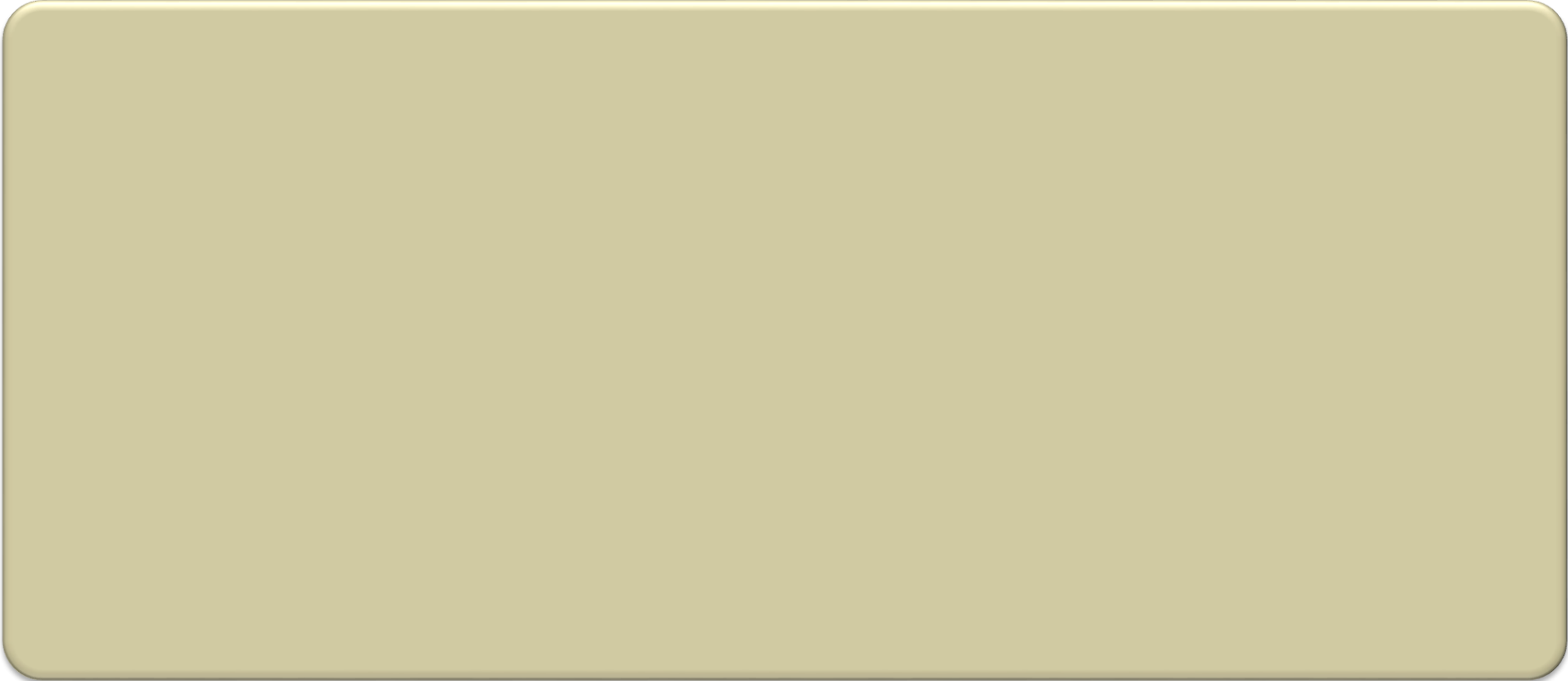


(تمرین کتاب) نمودار تابعی را رسم کنید که مشتق آن:

الف) در یک نقطه برابر صفر شود. ب) در $x = 2$ برابر ۳ شود.

پ) در تمام نقاط مثبت باشد.

ت) در تمام نقاط یکسان باشد. ث) در تمام نقاط منفی باشد.



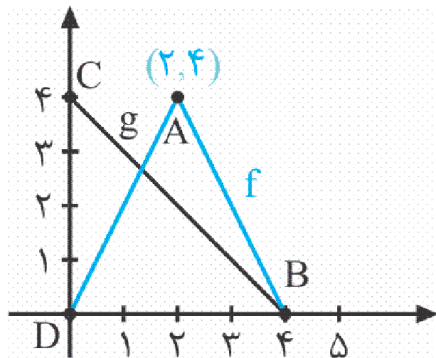
(تمرین کتاب) مشتق پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & x \geq 1 \\ 2x & x < 1 \end{cases}$ را در نقطه $x = 1$ بررسی کنید.

(تمرین کتاب) اگر $f(x) = |x^2 - 4|$ ، به کمک تعریف مشتق، مشتق پذیری f را در نقاطی به طول های ۲ و -۲ بررسی کنید.

(تمرین کتاب) اگر $f'(1) = 3$ و $g'(1) = 5$ مطلوب است، $(f + g)'(1)$ و $(3f + 2g)'(1)$

(تمرین کتاب) نمودار توابع f و g را در شکل زیر در نظر بگیرید.

اگر $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ مطلوب است $h'(1)$ و $h'(2)$ ، $h'(3)$.



(تمرین کتاب) اگر $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{x}^2 & \mathbf{x} \leq 0 \\ \mathbf{x} & \mathbf{x} > 0 \end{cases}$ ، نشان دهید $\mathbf{f}'_+(\mathbf{0})$ و $\mathbf{f}'_-(\mathbf{0})$ موجودند ولی مشتق موجود نیست.

(تمرین کتاب) مشتق توابع داده شده را بیابید.

$$f(x) = (\sqrt{3x+2})(x^3 + 1)$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{-3x + 2}$$

(تمرین کتاب) معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = t^2 - t + 10$ بر حسب متر در بازه زمانی $[0, 5]$

داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[0, 5]$ با هم برابرند؟

(تمرین کتاب) گنجایش ظرفی ۴۰ لیتر مایع است. در لحظه $t = 0$ سوراخی در ظرف ایجاد می‌شود. اگر حجم

مایع باقی‌مانده در ظرف پس از t ثانیه از رابطه $V = 40\left(1 - \frac{t}{100}\right)^2$ به دست آید؛

الف) آهنگ تغییر متوسط حجم مایع در بازه زمانی $[0, 1]$ مقدار است؟

ب) در چه زمانی، آهنگ تغییر لحظه‌ای حجم برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[0, 100]$ می‌شود؟

مشتق توابع مثلثاتی (مخصوص رشته ریاضی)

$$۱- \boxed{(\sin \Delta)' = \Delta' \cos \Delta}$$

$$۲- \boxed{(\cos \Delta)' = -\Delta' \sin \Delta}$$

$$۳- \boxed{(\tan \Delta)' = \Delta' (1 + \tan^2 \Delta)}$$

نکته: در کتاب درسی معرفی از مشتق تابع $\cot$ زده نشده! ما هم کاری بهوش نداریم! فقط آگه

تو امتحان $\cot$ دیدی نترس! به جاش بنویس $\frac{1}{\tan}$ و بعد محاسبات مشتق رو انجام بده!

مثال) (کار در کلاس) مشتق توابع زیر را به دست آورید.

$$f(x) = \sin x \cdot \tan x$$

$$g(x) = \frac{\sin \cos x}{1 - \sin x}$$

$$h(x) = \cos^3 x$$

$$f(x) = \sin^{\sqrt{2}} x + \cos^{\sqrt{2}} x$$

$$f(x) = \tan^{\sqrt{2}}(x) - \sqrt{2} \cos(x)$$

$$f(x) = \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}$$

$$f(x) = \sin x \cos 2x$$

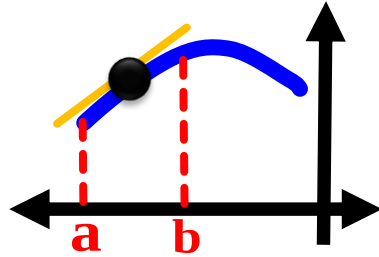
رياضت با من



فصل ۵ :

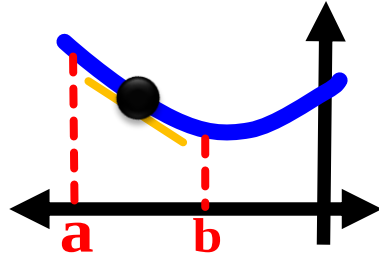
کاربرد مشتق

آزمون یکنوایی توابع



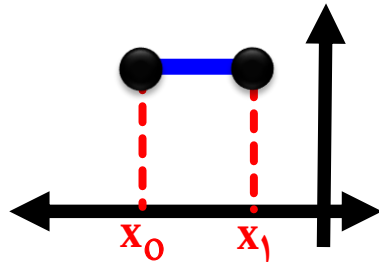
اگر در یک بازه تابع f صعودی آید باشد،
در آن بازه علامت مشتق مثبت است.

$$f' > 0$$



اگر در یک بازه تابع f نزولی آید باشد،
در آن بازه علامت مشتق منفی است.

$$f' < 0$$



اگر در یک بازه تابع f مشتق موجود و صفر
باشد، در آن بازه تابع f ثابت است.

$$f' = 0$$

مثال: (مثال کتاب) تابع $f(x) = x^3 - 3x$ در چه بازه‌هایی صعودی اکید و در چه بازه‌هایی نزولی اکید است؟

نقاط بحرانی

نقطه‌ی $c \in D_f$ ، نقطه‌ی بحرانی تابع f می‌گوییم اگر یا $f'(c)=0$ یا $f'(c)$ تعریف نشده باشد.

توجه اگر دامنه‌ی تعریف تابع f بازه‌ی $[a, b]$ باشد، نقاط a و b بحرانی به حساب می‌آیند.

بدست آوردن نقاط بحرانی از ضابطه

$$\xrightarrow{\text{مشتق بگیر!}} f'(x) = \frac{A}{B} \begin{array}{l} \xrightarrow{A=0} \text{اگر نقطه درونی دامنه} \\ \xrightarrow{B=0} \text{باشند، بحرانی هستند} \end{array}$$



تابع با ضابطه $f(x) = x^{\frac{4}{3}} - x^{\frac{2}{3}}$ در $[-1, 1]$ چند نقطه بحرانی دارد؟

۵(۴

۴(۳

۳(۲

۲(۱

نقاط اکسترمم (نسبی) و مفومش

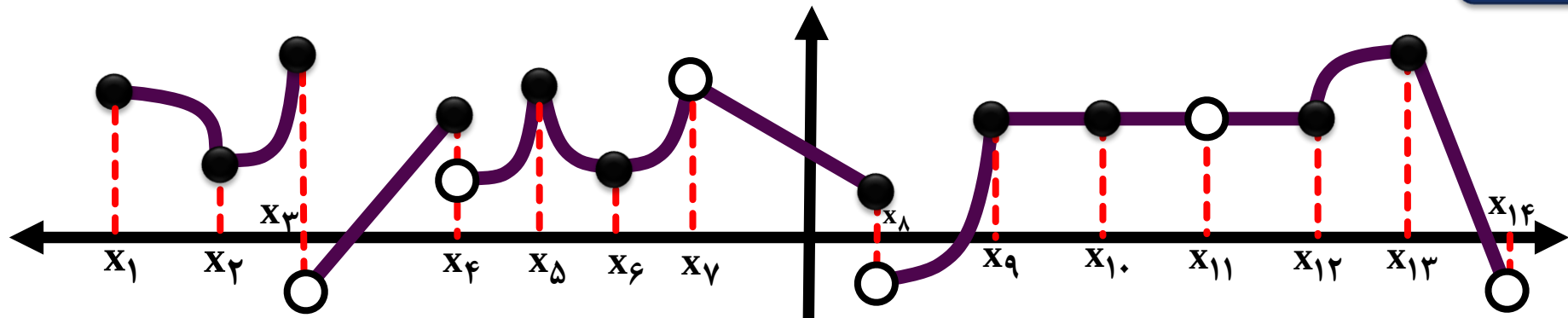
به ماکزیمم یا مینیمم می‌گویند اکسترمم!

مینیمم (ماکزیمم) نسبی

نقطه‌ی $x=c \in D_f$ را مینیمم (ماکزیمم) نسبی برای تابع f می‌گوییم،

هرگاه عرضش کوچکتر (بزرگتر) یا مساوی عرض نقاط همسایگی آن باشد!

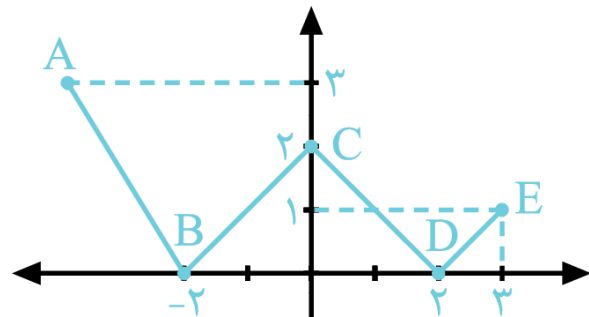
توجه شرط لازم اکسترمم نسبی شدن یک نقطه، وجود همسایگی (راست و چپ) اطراف آن است.



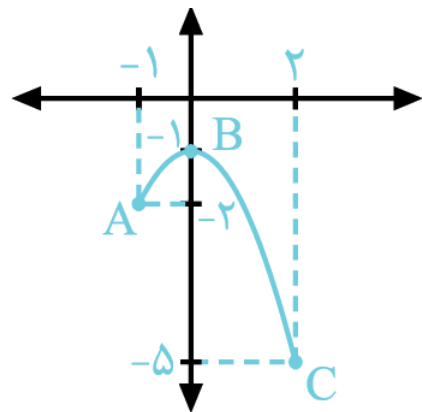
قضیه فرما: اگر تابع f در نقطه‌ای به طول C اکسترمم نسبی داشته باشد و $f'(c)$ موجود باشد، آنگاه $f'(c) = 0$ است.

مثال: (کار در کلاس) برای نقاط مشخص شده در هر یک از توابع زیر، نوع اکسترمم نسبی، مقدار اکسترمم نسبی و مقدار مشتق را در آن نقطه مناسبه کنید.

الف) $f(x) = ||x| - 2|; x \in [-5, 3]$



ب) $g(x) = -x^2 - 1; x \in [-1, 2]$



آزمون مشتق اول

تابع مشتق را بدست آورده و تعیین علامت می‌کنیم! علامت مشتق در هر بازه،

نوع یکنوایی تابع را مشخص می‌کند! با تعیین جهت یکنوایی در جدول، نقاط اکسترمم نسبی مشخص می‌شوند!

مثال: با استفاده از آزمون مشتق اول، نقاط اکسترمم نسبی و مقادیر آن‌ها را برای تابع $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 1$ بیابید.

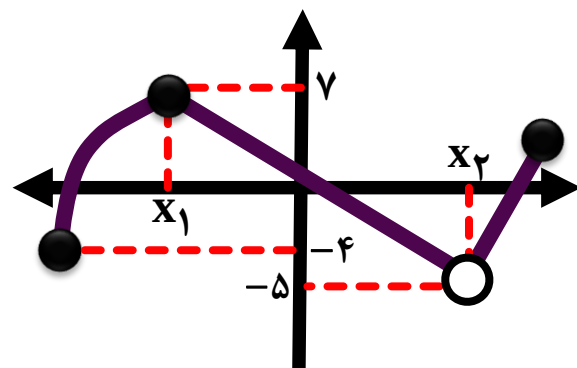
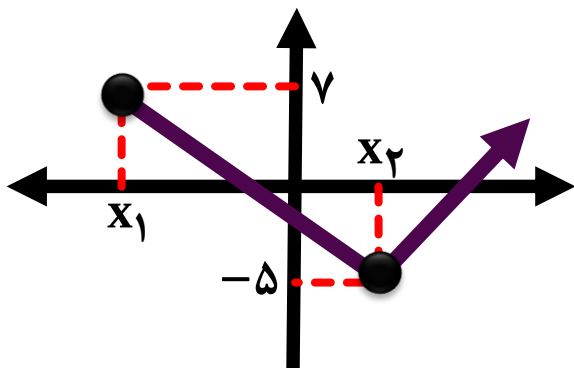
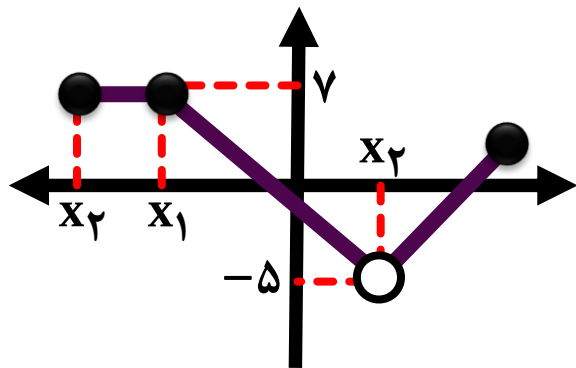
مینیمم (ماکزیمم) مطلق

نقطه‌ی $x=c \in D_f$ ، مینیمم (ماکزیمم) مطلق برای تابع f می‌گوییم،

هرگاه عرضش کوچکتر (بزرگتر) یا مساوی عرض تمام نقاط دامنه‌اش باشد

توجه

برای اکسترمم مطلق شدن، وجود همسایگی اهمیتی ندارد، چون عرضش با کل نقاط مقایسه می‌شود!



توجه

هر اکسترمم مطلق می‌تواند نسبی هم باشد (چه زمانی؟) و هر اکسترمم نسبی می‌تواند مطلق هم باشد (چه زمانی؟)

(فعالیت کتاب) آیا تابع $y = |x^2 - 1|$ در $[-2, 3]$ دارای اکستریم مطلق است؟ در صورت وجود با رسم نمودار مقادیرشان را بیابید.

روش محاسبه اکسترمم‌های مطلق تابع f در بازه بسته $[a, b]$

گام اول: مشتق تابع را به دست آورده و نقاط بحرانی f را می‌یابیم.

گام دوم: مقدار تابع را در هر یک از نقاط بحرانی محاسبه می‌کنیم.

گام سوم: در گام دوم، بزرگ‌ترین عدد به دست آمده، مقدار $\max$ مطلق و کوچک‌ترین آن‌ها، $\min$ مطلق.

(مثال کتاب) نقاط اکسترمم مطلق تابع $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ را در بازه $[-1, 3]$ تعیین کنید.

تشخیص نقاط بحرانی در نمودار

رسم یک خط مماس، همه چیز را مشخص می‌کند!

در هر کدام از سه حالت زیر در نمودارها، نقطه بحرانی داریم و لاغیرا ببینید :

۱

خط مماس افقی باشد

مشتق موجود و صفر

۲

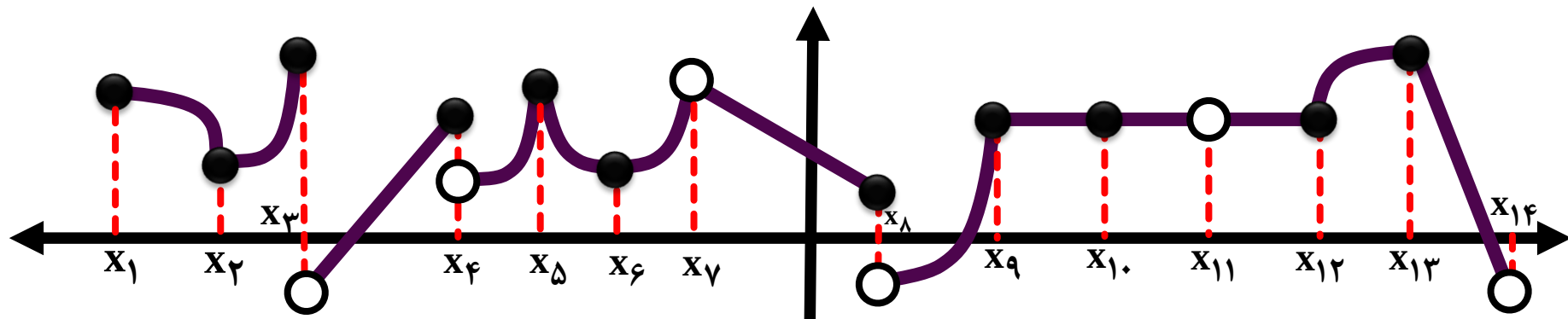
خط مماس قائم باشد

مشتق ناموجود است

۳

خط مماس قابل رسم نباشد

مشتق ناموجود است



هر اکسترممی بحرانی است، اما هر بحرانی ای اکسترمم نیست!

توجه

بهینه‌سازی یا optimization

یعنی پیدا کردن بهترین حالت، مثل کمترین مقدار برای زمان، هزینه، فاصله یا بیشترین مقدار برای سود
مسامت یا مهم! مسائل بهینه‌سازی معمولا با **بیان فارسی** و **کلمات کمترین یا بیشترین** همراهند!

روش حل مسائل بهینه‌سازی با استفاده از رمز **نقتم** !!

۱ **ن : نمادگذاری**، رسم شکل (در صورت نیاز) و قرار دادن معلوم‌ها و نمادهای مجهولات $\leftarrow X$ و Y

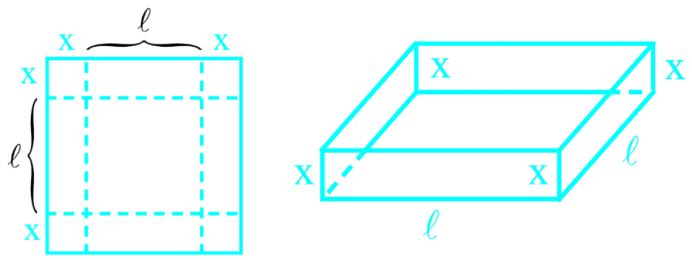
۲ **ف : f** ضابطه‌ی تابعی که قرار است بهینه شود را بنویسید

۳ **ت : تک متغیرش کن!** آله اف دو متغیره بود، تک متغیرش کن! (با استفاده از یه رابطه از دل سوال!)

۴ **م : max-min** عرض اکسترمم (عالا یا ماکزیمم یا مینیمم) تابع تک متغیره رو بدست بیار!

مثال: (مثال کتاب) نشان دهید در بین تمام مستطیل‌های با محیط ثابت ۱۴ سانتی‌متر، مستطیلی بیشترین مساحت را دارد که طول و عرض آن با هم برابر باشند.

مثال (مثال کتاب) مطابق شکل، ورقه فلزی به طول 30 cm ، 1 در نظر بگیرید. می‌خواهیم از ۴ گوشه آن مربع‌هایی کوچک به ضلع x را بردش بزنیم و سپس با تا کردن ورق در امتداد فخط چین‌ها، جعبه‌ای در باز بسازیم. مقدار x مقدار باشد تا حجم قوطی حداکثر شود؟



(تمرین کتاب) بزرگ‌ترین بازه از $\mathbb{R}$ که تابع $f(x) = x^3 - 12x + 4$ در آن نزولی اکید باشد، کدام است؟ چرا؟

(تمرین کتاب) با تشکیل جدول تغییرات تابع $g(\mathbf{x}) = \frac{1}{\mathbf{x}^2 + 1}$ ، مشخص کنید تابع در چه بازه‌هایی صعودی اکید و در کدام بازه‌ها نزولی اکید است؟

(تمرین کتاب) نقاط بحرانی توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2}$$

$$g(x) = x^3 + 3x^2 - 4$$

$$h(x) = \sqrt[3]{x}$$

(تمرین کتاب) در تابع زیر ابتدا نقاط بحرانی را به دست آورید و سپس با رسم جدول تغییرات، نقاط ماکزیمم نسبی و مینیمم

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$$

نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید.

(تمرین کتاب) مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع زیر را در بازه‌های مشخص شده، در صورت وجود به دست آورید.

$$f(x) = -2x^3 + 9x^2 - 13 \quad ; \quad x \in [-1, 2]$$

(تمرین کتاب) اگر نقطه $(۲, ۱)$ ، نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x) = x^3 + bx^2 + d$ باشد، مقادیر b و d را به دست آورید.

(تمرین کتاب) هر صفحه مستطیل شکل از یک کتاب جیبی، شامل یک متن با مساحت ثابت ۳۲ فواید بود. هنگام طراحی قطع این کتاب، لازم است حاشیه‌های بالا و پایین هر صفحه ۲ و حاشیه‌های کناری هر کد ۴ یک سانتی‌متر در نظر گرفته شوند. ابعاد صفحه را طوری تعیین کنید که مساحت هر صفحه از کتاب کمترین مقدار ممکن باشد.

T مجموع اضلاع قائمه مثلث قائم الزاويه ای ۸ است. کمترین مقدار وتر آن چقدر است؟

(۱) $2\sqrt{2}$

(۲) $4\sqrt{2}$

(۳) $3\sqrt{2}$

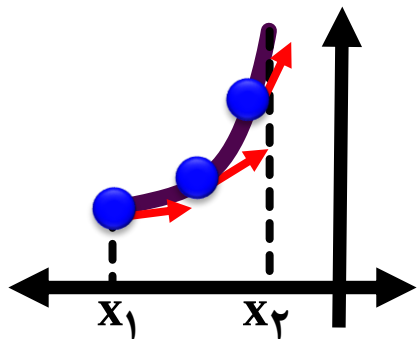
(۴) $\sqrt{2}$

A

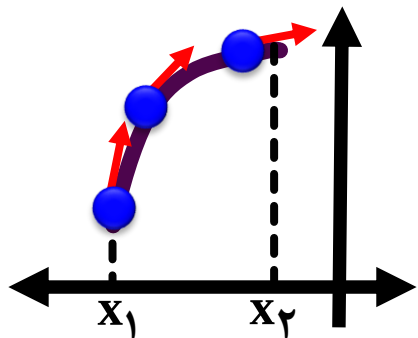
جهت تقعر

اگر بخواهیم پی ببریم که جهت تقعر تابع f در چه بازه‌ای رو به بالا یا رو به پایین است

کافیست f'' را تعیین علامت کنید!

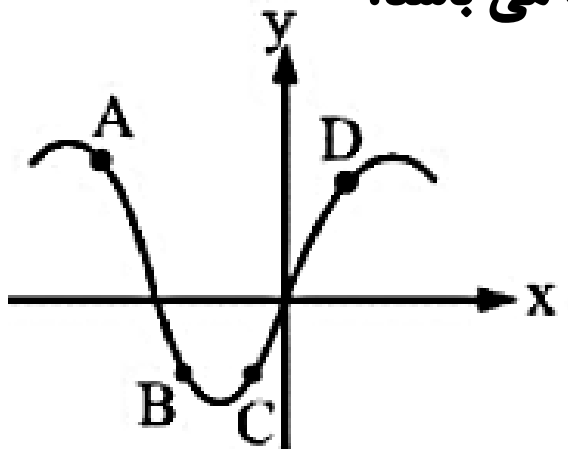


۱ در فواصلی که $f'' > 0$ است، جهت تقعر رو به بالا است.



۲ در فواصلی که $f'' < 0$ است، جهت تقعر رو به بالا است.

در کدام نقطه از نمودار شکل زیر، مقادیر f' , f'' هر دو مثبت می باشد؟



D (۴

C (۳

B (۲

A (۱

مثال) (مثال کتاب) جهت تقعر توابع زیر را در دامنه تعریفشان به دست آورید.

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$g(x) = x^3 + 3x^2 + 1$$

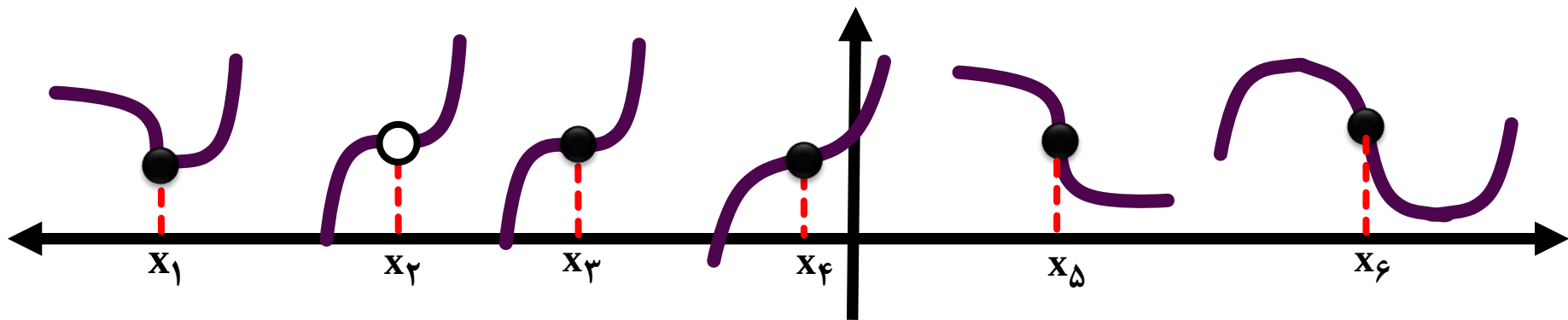
نقطه عطف

نقطه‌ای از دامنه تابع که جهت تقعر در آن عوض می‌شود. هر نقطه‌ای که جهت تقعر

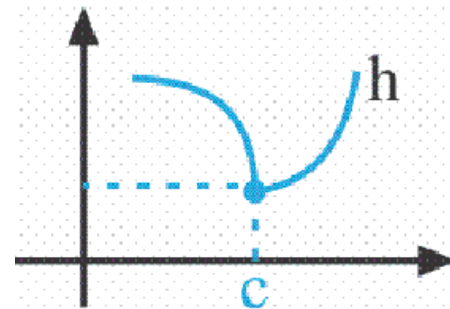
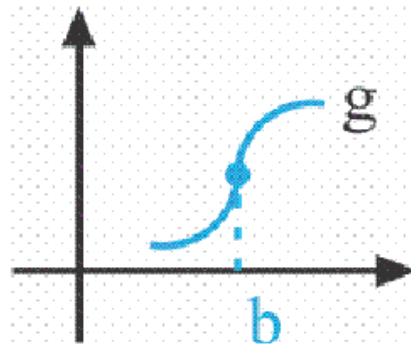
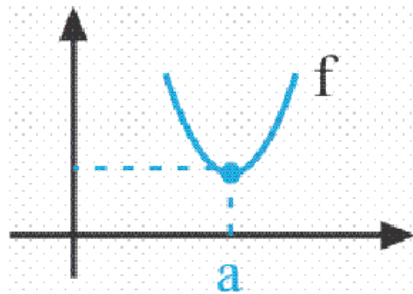
در آن عوض می‌شود! دقت کنید هر جا تقعر عوض شد عطف نیست! برای عطف شدن ^۳ شرط لازمه!

- ۱ عضو دامنه تابع باشد!
- ۲ خط مماس در آنجا موجود باشد
- ۳ جهت تقعر در آن عوض شود

۳ مدل نقطه عطف داریم! عطف افقی، عطف قائم و عطف مایل!



مثال) (مثال کتاب) در هر یک از نمودارهای زیر، نقطه عطف را در صورت وجود، مشخص و فقط مماس بر منحنی را رسم کنید



روش بدست آوردن عطف

اول تشخیص کانتریداهای عطف! بعد، استی آزماییشون!

$$۱) y = x^3 - 2x^2 + x - 6$$

$$۲) y = \sqrt[3]{x-1}$$

- ۱- دامنه تابع را به دست می‌آوریم.
 - ۲- محل تلاقی نمودار با محورهای مختصات را مشخص می‌کنیم. (در صورت وجود)
 - ۳- f' را به دست می‌آوریم و با تعیین علامت آن، بازه‌هایی که f در آن‌ها صعودی یا نزولی است را مشخص می‌کنیم.
 - ۴- نقاط بحرانی و اکسترم‌های نسبی تابع را می‌یابیم. (در صورت وجود)
 - ۵- f'' را به دست آورده و با تعیین علامت آن، جهت تقعر تابع در بازه‌های مختلف را مشخص می‌کنیم.
 - ۶- نقطه عطف را می‌یابیم. (در صورت وجود)
 - ۷- بررسی رفتار تابع در بی‌نهایت (در صورت وجود)
 - ۸- معادله مماس‌های تابع را به دست می‌آوریم. (در صورت وجود)
 - ۹- در صورت نیاز از نقاط کمکی هم استفاده می‌کنیم.
- حالا جدول رفتار تابع (متشکل از f و f' و f'') را تشکیل داده و بعد نمودار تابع را رسم می‌کنیم.

مثال) (مثال کتاب) نمودار تابع زیر را رسم کنید.

$$f(x) = x^3$$

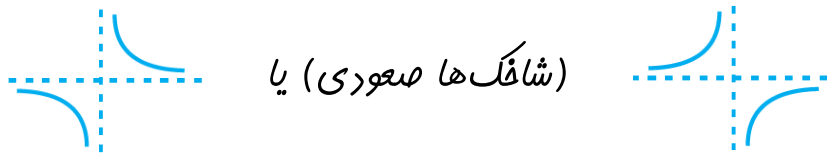
$$f(x) = (x - 1)^2 (x + 3)$$

تابع هموگرافیک

تابع $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ که $c \neq 0$ ، را یک تابع هموگرافیک می‌گوییم. این تابع دارای یک مجانب قائم

به معادله $x = -\frac{d}{c}$ (ریشه مخرج) و یک مجانب افقی به معادله $y = \frac{a}{c}$ (نسبت ضرایب x ها) است. شکل

کلی آن به دو صورت (شافک‌ها صعودی) یا (شافک‌ها نزولی) است.



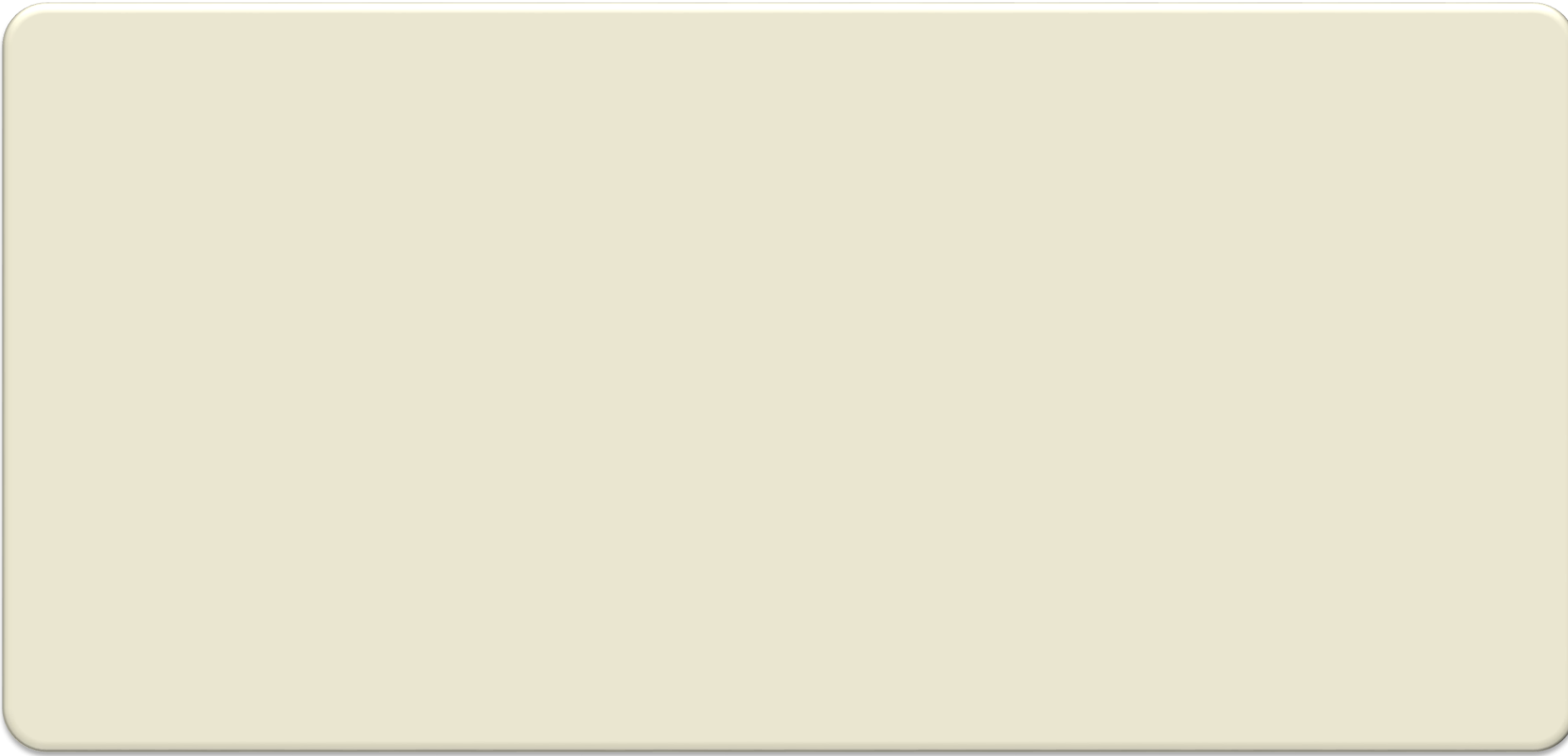
نکته: شرط $c \neq 0$ خیلی مهمه‌ها! چون آگه $c = 0$ ، یک تابع خطی به معادله $y = \frac{ax+b}{d}$ داریم که دیگه تابع

هموگرافیک نیست! یک فطه.

نکته: در شرایطی که $c \neq 0$ و $ad = bc$ ، این تابع به یک تابع ثابت به معادله $y = \frac{a}{c}$ که $x \neq -\frac{d}{c}$ تبدیل میشود.

مثال) (مثال کتاب) جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x) = \frac{3x+4}{-2x+1}$ را رسم کنید.

(تمرین کتاب) نمودار تابع **f** را به گونه ای رسم کنید که در نقطه ای مانند **a** جهت تقعر عوض شود ولی این نقطه، نقطه ی عطف نباشد.



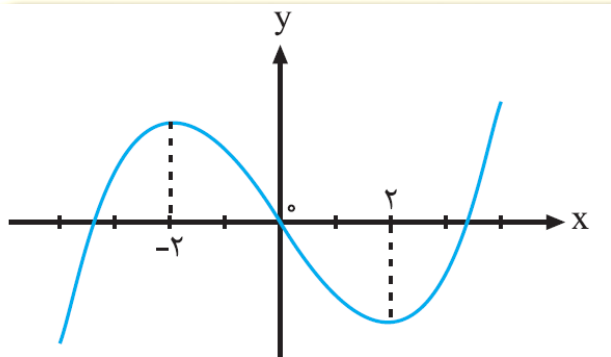
(تمرین کتاب) جهت تععر توابع زیر را بررسی کرده و نقطه‌ی عطف آن‌ها را در صورت وجود به دست آورید.

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

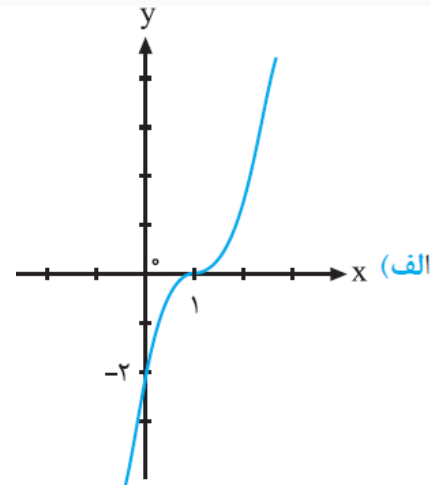
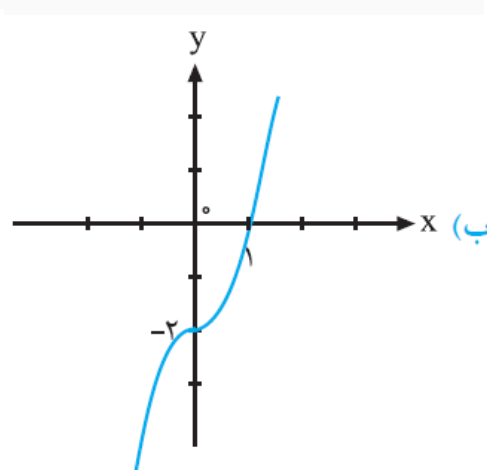
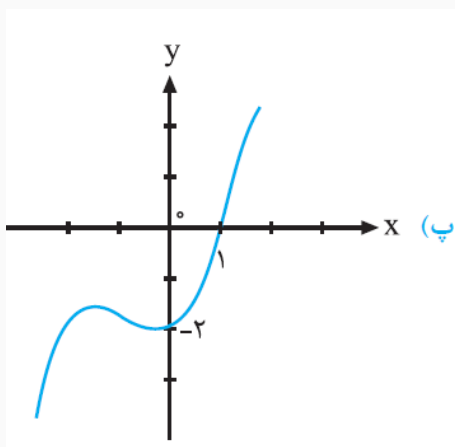
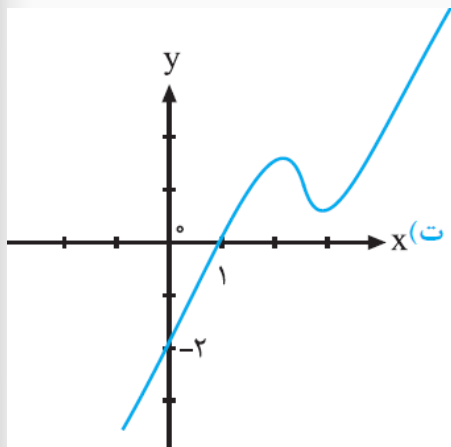
$$f(x) = \sqrt[3]{x+1}$$

(تمرین کتاب) اگر $(0,0)$ نقطه عطف تابع درجه سوم $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ باشد که نمودار آن در شکل زیر رسم شده است، a, b, c را بیابید.



(تمرین کتاب) فرض کنید $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ و محل تقاطع میانه‌های آن نقطه $(2,1)$ است. اگر این تابع از نقطه‌ی $(-1, 0)$ بگذرد، ضابطه‌ی تابع را به دست آورید.

(تمرین کتاب) کدام یک از نمودارهای زیر مربوط به $f(x) = x^3 + x - 2$ است؟



رياضت با من