

استاد بهنام سرهنگی  
مدرس ریاضی فولیتو

بایه یازدهم

دوره دوم متوسطه

با فولیتو فولی تو

# ریاضی یازدهم



((کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر برای سایت رسمی انتشارات فولیتو محفوظ است))



**شیب خط** نسبت اختلاف ارتفاع به فاصله‌ی طولی در هر دو نقطه دلخواه از خط می‌شود شیب خط.

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$m > 0 \rightarrow$  صعودی  
 $m = 0 \rightarrow$  ثابت  
 $m < 0 \rightarrow$  نزولی

زاویه‌ای که خط با جهت محور ایکس‌ها می‌سازد

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan \alpha$

**شیب در معادله‌ی صریح**  $y = mx + d$  ← شیب ایکس = شیب

**شیب در معادله‌ی ضمنی**  $ax + by + c = 0$  ← شیب وای = - شیب ایکس

**نوشتن معادله خط** کافی است شیب خط و یک نقطه از آن را داشته باشیم!

$m, A \left( \begin{matrix} x_0 \\ y_0 \end{matrix} \right) \rightarrow (y - y_0) = m(x - x_0)$

در این سوالات ابتدا شیب را مناسبه کنید. بعد با شیب و یکی از نقاط (دلخواه) معادله خط را بنویسید.

در مثلث ABC، با مختصات رئوس  $A(2, -3), B(-2, 5), C(-4, 1)$ ، معادله میانه وارد بر ضلع AC کدام است؟

مثال: مجموع طول از مبدأ و عرض از مبدأ خط گزیده از دو نقطه A و B در شکل مقابل به دست آورید.

**answer**

**رسم خط** برای رسم خط به دو نقطه از آن نیاز داریم. بهترین راه این است که عرض از مبدأ (x) را صفر می‌دهیم) و طول از مبدأ (y) را صفر می‌دهیم) را درست یابیم این دو نقطه را بهم وصل کنیم.

**شرط موازی بودن و عمود بودن دو خط**

دو خط با هم موازی‌اند اگر شیب آنها برابر باشد و بر هم عمودند اگر شیب‌های آنها عکس و قرینه یکدیگر باشد. (یعنی شیب شیب‌های آنها بشود -1)

**فاصله دو نقطه از هم**

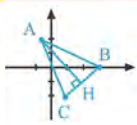
$|AB| = d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

مثال: (تمرین کتاب) وضعیت هر جهت از خطوط زیر را نسبت به هم مشخص کنید:

$l: 2x - y = 1$        $d: y = 2x - 3$        $\Delta: x + 2y = 0$

**answer**

مثال: نقاط  $A(-1, 2)$  و  $B(3, 0)$  و  $C(1, -2)$  مقتضات سه رأس مثلث  $ABC$  هستند. معادله ارتفاع  $AH$  و طول آن را به دست آورید.



**answer**

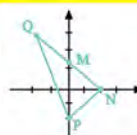
**مقتضات وسط پاره خط** در واقع وسط یعنی میانگین!

$X_M = \frac{X_A + X_B}{2}$        $Y_M = \frac{Y_A + Y_B}{2}$

مثال: (تمرین کتاب)  $A(12, 3)$  و  $B(10, -12)$  را در نظر بگیرید. (الف) فاصله مبدأ مقتضات را از وسط پاره خط  $AB$  به دست آورید. (ب) معادله عمود منصف پاره خط  $AB$  را بنویسید.

**answer**

مثال: اگر نقاط  $P(0, -2)$ ،  $N(2, 0)$ ،  $Q(-2, 3)$ ،  $R(0, 3)$  متعلق به مثلث  $PNQ$  باشند. میانگین  $PM$  را محاسبه کنید.



**answer**

**فاصله نقطه از خط** معادله خط شما باید ضمنی باشد... داریم:

$A(x_0, y_0)$        $ax + by + c = 0$

$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

فاصله نقطه  $A(1, 2)$  از خط گذرنده بر دو نقطه  $(-5, 4)$  و  $(3, -2)$  کدام است؟

**answer**

**فاصله خط موازی** ابتدا همانند بالا معادلات را ضمنی نوشته و ضرایب یکس و وای را یکی می کنیم:

$ax + by + c' = 0$        $ax + by + c = 0$        $d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

فاصله بین خط های موازی  $y = 2x$  و  $4x - 2y + 5 = 0$  کدام است؟

**answer**



**کاربرد معادله درجه ۲ (تغییر متغیر)**

$t = x \rightarrow t^2 - t - 6 = 0$

$(t+2)(t-3) = 0 \rightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = -2 \\ \sqrt{x} = 3 \end{cases} \rightarrow x = 9$

مثال:  $x - \sqrt{x} - 6 = 0$

مثال: معادله  $x^2 - 13x + 42 = 0$  را حل کنید.

answer

**مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه ۲**

اگر  $\Delta > 0$  باشد می‌توان جمع و ضرب دو ریشه را از روابط زیر به دست آورد:

sum  $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

product  $P = x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$

مثال: در معادله  $-2x^2 + x + 5 = 0$  بدون حل معادله، مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها  $(P, S)$  را بیابید.

answer

**نوشتن معادله درجه دوم با داشتن S و P**

در یک معادله درجه دوم اگر S جمع ریشه‌ها و P ضرب آن‌ها باشد، معادله به صورت  $x^2 - Sx + P = 0$  می‌باشد.

مثال: محیط یک زمین مستطیل شکل ۱۸ متر و مساحت آن ۱۴ متر است. اندازه طول و عرض این زمین را تعیین کنید.

answer

**ماکزیمم، مینیمم و برد سهمی**

if  $a > 0$  → سهمی دارای min است → مقدار min  $y = \frac{-b}{2a}$

if  $a > 0$  → دهانه سهمی رو به بالا است →  $R = [\frac{-b}{2a}, +\infty)$

if  $a < 0$  → سهمی دارای max است → مقدار max  $y = \frac{-b}{2a}$

if  $a < 0$  → دهانه سهمی رو به پایین است →  $R = (-\infty, \frac{-b}{2a}]$

مثال: یک ماهیگیر می‌خواهد در کنار رودخانه محوطه‌های مستطیل شکل را فئس‌کشی کند. او تنها هزینه ۱۰۰ متر فئس‌کشی را در اختیار دارد. ابعاد مستطیل را طوری تعیین کنید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن گردد.

answer

نکته: صف‌های تابع درجه ۲: به طور کلی به نقاط برخورد یک تابع با محور Xها، صف‌های آن تابع می‌گویند. چرا که مقدار تابع در آن‌ها می‌شود صفر یا صفرهای پی‌درپی!



مثال: (مثال کتاب) فوتبالیستی توپی را با زاویه ۳۵ درجه نسبت به سطح زمین با سرعت اولیه  $\frac{20\sqrt{3}}{3}$  شوت می‌کند. مسیر حرکت توپ، هانتز شکل مقابل است که تابع مسیر آن به صورت  $y = \frac{1}{3}x^2 + x$  می‌باشد. نقطه برخورد توپ با زمین را به دست آورید.

**answer**

**مشخص کردن علامت a و b و c از روی نمودار  $y = ax^2 + bx + c$**

۱- علامت a: اگر جهت سهمی رو به بالا بود،  $a > 0$  و اگر رو به پایین بود،  $a < 0$  است.

۲- علامت c: اگر  $X = 0$  مقدار عرض از مبدأ سهمی به دست می‌آید که می‌شود  $y = c$ ، پس c همان عرض از مبدأ یا محل برخورد سهمی با محور y است!

۳- علامت b: طول راس سهمی می‌شود  $x = -\frac{b}{2a}$  با توجه به اینکه علامت a را یاقیم و علامت طول راس سهمی را هم از نمودار خواهیم یافت، علامت b مشخص می‌شود.

مثلا به سهمی مقابل دقت کنید:

مثال: معادله سهمی‌های زیر را بنویسید.

**answer**

**answer**

**معادله گویا**

جمع و تفريق هند عبارت گویا

$$\frac{x}{10} + \frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{2x-2} \rightarrow \frac{x}{10} + \frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{2(x-1)} = 0 \rightarrow \frac{x}{10} + \frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{2(x-1)} = 0$$

$$\rightarrow \frac{x^2 - x + 10 - 5x - 5}{10(x-1)} = 0 \rightarrow \frac{x^2 - 6x + 5}{10(x-1)} = 0 \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=5 \end{cases}$$

روش حل: همه‌ی عبارات یک طرف ← مخرج مشترک ← صورت برابر صفر ← فاینا! چک!

جواب‌های پرست آمده را چک میکنیم تا مخرج کسری را صفر نکند!

**FINAL CHECK**

مثال: (فعالیت کتاب درسی) معادله  $\frac{x}{x^2-1} - \frac{2}{x+1} = \frac{x-2}{x^2-x}$  را حل کنید.

**answer**

**مستطیل طلایی** نسبت طول به عرض برابر  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  (مردود ۱.۶۲) می‌باشد (نسبت طلایی)

$\frac{X+Y}{X} = \frac{X}{Y}$

مساحت مستطیل طلایی به عرض  $\sqrt{2}$  چقدر است؟

**معادله کنگ** معمولات زیر را نگاه

طرفین به توان فرجه را نگاه  $\sqrt{x+6} - \sqrt{2x+5} = 1 \rightarrow \sqrt{x+6} = \sqrt{2x+5} + 1$

$x+6 = 2x+5+2\sqrt{2x+5}+1 \rightarrow -x = 2\sqrt{2x+5} \rightarrow x^2 = 8x+20$

$\rightarrow x^2 - 8x - 20 = 0 \rightarrow (x-10)(x+2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=10 \\ x=-2 \end{cases}$

روشن مل : را نگاه کن  $\leftarrow$  به توان فرجه را نگاه برسون  $\leftarrow$  فاینا چک !

چک کن که آیا جواب های درست آمده در معادله اصلی صدق می کنند؟ **FINAL CHECK**

معادله  $3x = 2 + \sqrt{5x-4}$  را حل کنید.

مثال: اگر در کلاس بدون حل معادله، توضیح دهید که چرا معادلات زیر فاقد ریشه حقیقی هستند؟

$\sqrt{x-2} + \sqrt{2x+3} + 1 = 0$   $\sqrt{1-x} + \sqrt{x-2} = 0$   $\sqrt{t} + 2 = 0$

**answer** **answer** **answer**

**حل نمونه سوال بیشتر (کتاب + امتحانات گذشته)**

(تمرین کتاب) یک میله پریم بزرگ مطابق شکل توسط کابل هایی به چهار نقطه در زمین محکم شده است، به طوری که فاصله هر نقطه تا میله برابر است با فاصله نقطه ای مقابل آن تا میله. مختصات نقطه D را به دست آورید.

(تمرین کتاب) یکی از اضلاع مربعی بر خط  $L: y = 2x - 1$  واقع است. اگر  $A(2, 0)$  یکی از رئوس این مربع باشد، مساحت آن را به دست آورید.

**answer**

(تمرین کتاب) الف) نشان دهید دو خط با معادلات  $5x - 12y + 8 = 0$  و  $-10x + 24y + 10 = 0$  یا یکدیگر موازی، ب) فاصله این دو خط را مناسبه کنید.

**answer**

(تمرین کتاب) معادله  $x^4 - 8x^2 + 8 = 0$  را حل کنید.

answer

(تمرین کتاب) طول پترافیایی تیریز تقریباً ۴۶ درجه شرقی و عرض پترافیایی آن حدود ۳۸ درجه شمالی است. برای راحتی، می‌توانیم موقعیت این شهر را به طور خلاصه، به صورت (۴۶، ۳۸) نشان دهیم. این اطلاعات در مورد پایتخت به صورت (۶۱، ۲۵) است. با فرض اینکه مسافت فیزیکی هر درجه طول پترافیایی همانند مسافت فیزیکی هر درجه عرض پترافیایی برابر ۱۱۰ km باشد، مطلوب است محاسبه فاصله تقریبی این دو شهر.

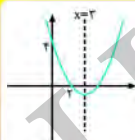
answer

(تمرین کتاب) معادله سهمی‌های زیر را بنویسید.

answer



answer

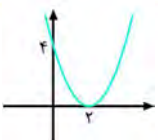


(تمرین کتاب) استادیومی به شکل مستطیل با دو نیم‌دایره در دو انتهای آن در حال سافت است. اگر محیط استادیوم ۵۰۰ متر باشد، ابعاد مستطیل را طوری بنویسید که: الف) مسافت مستطیل در اکثر مقدار ممکن گردد. ب) مسافت استادیوم در اکثر مقدار ممکن شود.

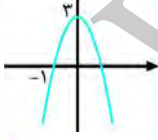
answer



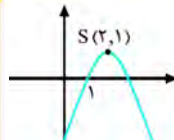
answer



answer



answer



answer





(تمرین کتاب) هر يك از معادلات زیر را حل کنید.

(الف)  $\frac{2x}{x-3} + \frac{x+1}{x+4} = \frac{x-1}{x-2}$

answer

(ب)  $\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-5} = 1$

answer

(ب)  $\sqrt{m} + \frac{1}{\sqrt{m}} = 2$

answer

(تمرین کتاب) علی به همراه پدر نفر از دوستان خود، ماهانه یک مجله ادبی ۱۶ صفحه‌ای منتشر می‌کند. پس از هروقتی مطالبه او معمولاً ۲ ساعت برای ویرایش ادبی مجله وقت صرف می‌کند. اگر رضا به او کمک کند، کار ویرایش هرور ۱ ساعت و ۲۰ دقیقه به طول می‌آید. حال اگر رضا بتواند به تنهایی کار ویرایش یک شماره از مجله را انجام دهد، نیازمند چه میزان وقت خواهد بود؟

answer

(امتحانات سال گذشته) دو خط به معادله‌های  $2x + 3y = 5$  و  $3x - 2y = 3$  در نظر بگیرید.  $a$  را طوری بیابید که:

(الف) این دو خط با هم موازی باشند. (ب) این دو خط بر هم عمود باشند.

answer

(امتحانات سال گذشته) مقدار  $m$  را چنان بیابید که مجموع ریشه‌های معادله  $2x^2 - (m+1)x - 3m = 0$  برابر با ۳ باشد.

answer

(امتحانات سال گذشته) مثلث  $ABC$  را با رئوسهای  $A(1,3)$  و  $B(1,1)$  و  $C(5,1)$  در نظر بگیرید.  
(الف) مقصدرات نقطه  $M$  وسط پاره‌قط  $BC$  را بیابید. (ب) طول میانه  $AM$  را بیابید.

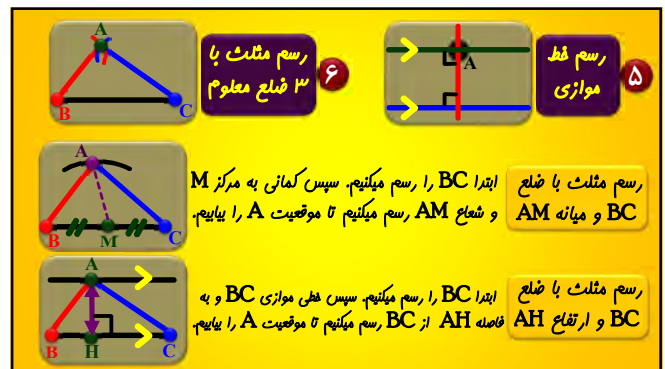
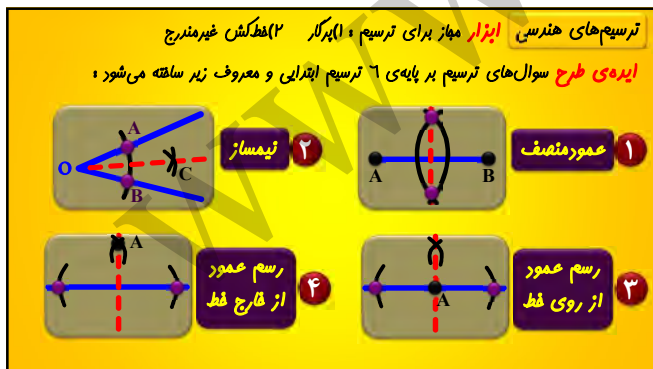
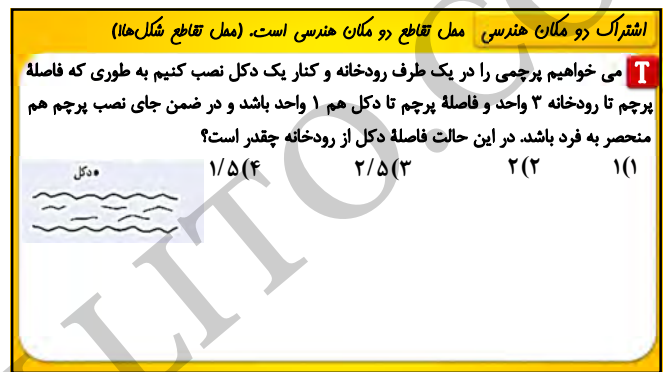
answer

(امتحانات تیزهوشان ۱۳۹۲) معادله  $1 - 8x^6 = 7x^3$  را حل کنید.

answer

(امتحانات تیزهوشان ۱۳۹۲) معادله خط گزیده از نقطه  $A(2,4)$  را بنویسید به طوری که با خط  $y = 2x + 2$  موازی باشد.

answer



مثال : (مشابه فعالیت کتاب) مثلثی رسم کنید که طول اضلاعش ۵ و ۳ و ۴ واحد طول باشد.

**answer**

مثال، (تمرین کتاب) مثلثی دلتوا رسم کنید و آن را  $ABC$  بنامید. عمودمئصف‌های دو ضلع این مثلث را رسم کنید و نقطه برخورد آنها را  $O$  بنامید. به مرکز  $O$  و به شعاع  $OA$  یک دایره رسم کنید. نقاط  $B$  و  $C$  نسبت به این دایره چه وضعیتی دارند؟ چرا؟

**answer**

مثال، (تمرین کتاب) مثلثی دلتوا رسم کنید و آن را  $ABC$  بنامید. نیمسازهای دو زاویه این مثلث را رسم کنید و نقطه برخورد آنها را  $O$  بنامید. از نقطه  $O$  بر سه ضلع مثلث عمود رسم کنید و پای یکی از عمودها را  $H$  بنامید. به مرکز  $O$  و به شعاع  $OH$  دایره‌ای رسم کنید. اضلاع مثلث  $ABC$  نسبت به این دایره چه وضعیتی دارند؟ چرا؟

**answer**



**انواع استدلال**

- استدلال استقرایی** رسیدن از جز به کل . در واقع با مشاهده‌ی درستی یک حکم در چند مورد مبرود، نتیجه میگیریم که حکم به طور کلی صحیح است.
- استدلال استنباطی** از نتایجی که قبلاً درستی آن اثبات شده برای اثبات حکم استفاده می‌شود.
- برهان خلف** بهای اثبات درستی حکم، غلط بودن نقیضش را اثبات می‌کنیم.

**روش کار** اینگونه است که ابتدا نقیض حکم را نوشته و آن را به عنوان فرض در نظر می‌گیریم. سپس به یک تناقض یا فرض یا نتایج درست قبلی میرسیم. (نتیجه : ششت اول رو کج گذاشتیم!)

**T** دانشمندان علوم تجربی از حرارت دادن قطعات مختلف آهنی در آزمایشگاه نتیجه گرفته‌اند که همه فلزات در اثر حرارت، انبساط پیدا می‌کنند». مبنای این نتیجه‌گیری کدام استدلال است؟

(۱) استدلال تمثیلی (۲) استدلال استقرایی (۳) استدلال استنباطی (۴) برهان خلف

(مثال کتاب) حکم «اگر  $n$  فرد باشد، آنگاه  $n$  فرد است» را به روش برهان خلف ثابت کنید.

**صغرتا ۰۰ قضیه** گزاره: یک جمله‌ی فبری (درست یا غلط) است.

تعریف قضیه یک گزاره‌ی همواره درست است که با استدلال استنباطی یا برهان خلف اثبات می‌شود.

فرض و حکم قضیه (حکم) (باید اثبات شود)  $A \Rightarrow B$  (فرض) (شرط مسئله)

عکس قضیه اگر جای فرض و حکم یک قضیه را عوض کنیم، عکس قضیه درست می‌آید. عکس قضیه ممکن است یک گزاره‌ی درست یا غلط باشد. مثلاً عکس قضیه بالا می‌شود:  $B \Rightarrow A$

قضیه دوشرطی اگر عکس یک قضیه نیز گزاره‌ای درست باشد، به آن قضیه دو شرطی می‌گوییم.

$A \Leftrightarrow B$  می‌خوانیم (A اگر و تنها اگر B) یا (اگر A آنگاه B و برعکس)



به عنوان مثال جمله‌های زیر همه گزاره‌اند. چون حاوی یک قیاس (درست یا غلط) علی به مدرسه آمد.

$1000 \leq$  عدد اول زوج وجود ندارد.

اما جملات زیر گزاره نیستند. چون خبری را ارائه نمی‌دهند.

چه رنگ زیبایی

آیا قطره‌های لوزی بر هم عمودند؟

از روی صندلی باشو.

آیا ۳۳ عددی اول است؟

یک مثلث متساوی‌الساقین رسم کنید.

**نقیض یک گزاره**

اگر **A** یک گزاره باشد، نقیض **A** می‌شود چیزی که **A** نباشد. ارزش نقیض یک گزاره دقیقاً مخالف ارزش خود گزاره است. در نتیجه اگر گزاره درست باشد، نقیض آن غلط و اگر گزاره غلط باشد، نقیض آن درست است.

به عنوان مثال:

الف) گزاره: «۲۳ عددی اول است»      نقیض آن: «۲۳ عددی اول نیست»

ب) گزاره: «**A** از **B** بزرگ‌تر است»      نقیض آن: «**A** کوچک‌تر مساوی **B** است»

**T** کدام قضیه زیر به صورت دو شرطی بیان می‌شود؟

(۱) هر مربعی، یک لوزی است. (۳) هر دو مثلث مساوی، مساحت‌های مساوی دارند.

(۲) هر عدد اولی، طبیعی است. (۴) هر دو مربع مساوی، مساحت‌های مساوی دارند.

**مثال نقض** مثالی است که کلیت درستی یک کلم را نقض میکند. مثال نقض روشی برای استدلال نیست؛ یعنی نمیتوان درستی یک کلم را با آن اثبات کرد و فقط مقصود از کلیت یک کلم است.

**T** کدام گزینه مثال نقض ندارد؟

(۱) به ازای هر عدد صحیح  $x$  حاصل  $\frac{1}{x^2+1}$  همواره غیرطبیعی است.

(۲) به ازای هر عدد طبیعی  $n$  عدد  $n^2 + n + 41$  اول است.

(۳) در هر مثلث قائم‌الزاویه، ضلع مقابل به زاویه  $90^\circ$  نمی‌تواند با اضلاع دیگر برابر باشد.

(۴) در هر مستطیل، قطرها بر هم عمودند.

مثال: در هر لوزی از قضیه‌های زیر، عکس قضیه را بنویسید. (درستی یا نادرستی عکس قضیه مهم نیست).

الف) قضیه: اگر یک چهارشکل متوازی‌الاضلاع باشد، آنگاه قطرهاش متصاف یکدیگر اند.

ب) قضیه: اگر دو ضلع از مثلثی با هم برابر باشند، آنگاه ارتفاع‌های تقاطع آن دو ضلع با هم برابرند.

در مثلث روبه‌رو داریم: (فرض:  $AB = AC$ ، کلم:  $CH' = BH$ )

ج) قضیه (تاس): در مثلث روبه‌رو داریم:  $DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

**نسبت** یک کسر است (مخرجش مخالف صفر)  $\frac{a}{b}; b \neq 0$

**تناسب** تساوی ۲ نسبت را یک تناسب می‌گویند. (مخرج همیشه مخالف صفر)  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}; b, d \neq 0$

**T** زاویه‌های مثلثی با اعداد ۸، ۵ و ۲ متناسب هستند. اندازه کوچک‌ترین زاویه خارجی مثلث کدام است؟

۷۲۰ (۱)      ۸۲۰ (۲)      ۸۴۰ (۳)      ۹۶۰ (۴)

**A**

**ویژگی‌های تناسب**

۱) طرفین وسطین  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

۲) ترکیب نسبت‌ها  $\frac{a}{b+a} = \frac{c}{d+c} \Leftrightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

۳) تفصیل نسبت‌ها  $\frac{a}{b-a} = \frac{c}{d-c} \Leftrightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

۳) جمع صورت‌ها و مخرج‌ها  $\frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k$

مثال: (تمرین کتاب) در تناسب زیر مشخص کنید نسبت  $\frac{a}{b}$  برابر با چه عددی است؟

$\frac{3a+10}{10+2a} = \frac{3b+7}{7+2b}$

**answer**

**قضیه تالس** اگر خطی موازی یک ضلع مثلث رسم شود، دو ضلع دیگر را بصورت متناسب قطع میکند

**تالس ۲ نسبتی (تالس چتر په چتر)**  $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$

**تالس ۳ نسبتی (تالس چتر په کل)**  $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

(تعمیم تالس) →

در شکل روبه رو، ST موازی BC است. حاصل عبارت  $x+y$  کدام است؟

(۱) ۵ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۷ (کتاب درسی)

مثال: در مثلث ABC، در شکل زیر DE موازی BC و EF موازی AC است با دو بار استفاده از قضیه تالس ثابت کنید:  $\frac{AD}{DF} = \frac{AE}{FC}$

**answer**

**عکس قضیه تالس** اگر خطی در یک ضلع مثلث طوری رسم شود که یکی از نسبت‌های تالس (۲ نسبتی یا ۳ نسبتی) در آن صدق کند، آنگاه خط با ضلع روبرویش موازی است.

**if OR**  $\left\{ \begin{array}{l} \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \\ \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \end{array} \right. \rightarrow MN \parallel BC$

**اثبات مکس قضیه تالس با پرهان خلف**

فرض کنید کلم مسئله غلط باشد و ..... لذا از نقطه D خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا ضلع AC را در نقطه‌ای مانند E' قطع کند. با توجه به قضیه تالس داریم:  $\frac{AE'}{E'C} = \frac{AD}{DB}$ . با توجه به فرض مسئله نیز که داشته‌ایم:  $\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DB}$  از دو نسبت نتیجه می‌گیریم که  $\frac{AE}{EC} = \frac{AE'}{E'C}$  با ترکیب این نسبت در مخرج داریم:  $\frac{AE}{AC} = \frac{AE'}{AC}$ . پس  $AE = AE'$  پس E بر E' منطبق است و DE' همان DE است و این تناقض است. پس از ابتدا فرض غلط بودن کلم مسئله (فرض خلف) نادرست بوده و کلم نمی‌تواند غلط باشد. یعنی  $DE \parallel BC$ .

**مفهوم تشابه ۲ مثلث**

دو مثلث متشابه‌تر اگر (۱) هر سه زاویه‌ی آنها نظیر به نظیر برابر و (۲) اضلاع یکی، K برابر اضلاع دیگری باشد.

**توجه:** به K نسبت تشابه دو مثلث گفته می‌شود.  $\frac{1}{K}$  هم نسبت تشابه است. (په‌راس)

**مالت‌های تشابه ۲ مثلث**

۱)  $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$  &  $C = C'$

**۲) ض ز ض**  $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = K$  &  $\hat{B} = \hat{B}' = \alpha$

→  $\frac{AC}{A'C'} = K$  &  $A = A'$  &  $C = C'$

**۳) ض ض ض**  $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$

→  $A = A'$  &  $C = C'$  &  $B = B'$

مثال: در شکل مقابل اندازه پاره‌خط CE برابر ۴۵ سانتی‌متر و  $BC \parallel DE$ ، اندازه پاره‌خط‌های AC و DE را به‌دست آورید.

**answer**

**تشابه اجزای فرعی دو مثلث متشابه**

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = k$$

$$\frac{AH}{A'H'} = \frac{AD}{A'D'} = \frac{AM}{A'M'} = k$$

**T** در مثلث‌های متشابه در شکل داده شده، نسبت ارتفاع‌های نظیر در دو مثلث کدام است؟ (۱)  $\frac{1}{6}$  (۲)  $\frac{2}{3}$  (۳)  $\frac{3}{4}$  (۴)  $\frac{4}{3}$

**نسبت مساحت و محیط** نسبت محیط دو شکل متشابه K و نسبت مساحت آنها  $K^2$  است.

$$\frac{P_2}{P_1} = K \quad \frac{S_2}{S_1} = K^2$$

**PROOF**  $\frac{P_2}{P_1} = \frac{ka+kb+kc}{a+b+c} = \frac{k(a+b+c)}{a+b+c} = k$

**PROOF**  $\frac{S_2}{S_1} = \frac{\frac{1}{2}(ka)(h_{ka})}{\frac{1}{2}(a)(h_a)} = \frac{(ka)(h_a)}{(a)(h_a)} = k^2$

**داستان‌های مثلث قائم‌الزاویه و ارتفاع وارد بر وترش**

۱ دو مثلث کوچکی که تولید می‌شوند هرکدام با مثلث اصلی و با یکدیگر متشابه‌اند. برای مقایسه نسبت تشابه هر دو مثلث متشابه از نسبت وتر آن دو استفاده کنید.

$$\triangle ABH \sim \triangle ACH \rightarrow K = \frac{c}{b}$$

$$\triangle ABC \sim \triangle ABH \rightarrow K = \frac{a}{c}$$

$$\triangle ABC \sim \triangle ACH \rightarrow K = \frac{a}{b}$$

**T** در مثلث قائم‌الزاویه ای با طول وتر ۴۰، ارتفاع وارد بر وتر را رسم کرده ایم. نسبت مساحت‌های دو مثلث حاصل ۹ گردیده است. مساحت مثلث قائم‌الزاویه اولیه کدام است؟

۱۳۵ (۱)    ۱۵۰ (۲)    ۱۴۵ (۳)    ۱۳۰ (۴)

**A**

۲ روابط طولی بسیار مهم مثلث قائم‌الزاویه در محور ارتفاع وارد بر وترش از تان شب واجب‌تر است.

$$b^2 = a \times CH$$

$$c^2 = a \times BH$$

$$AH^2 = BH \times CH$$

مربع هر ضلع قائمه برابر ضرب وتر در تصویرش بر وتر است.

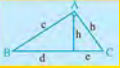
مربع ارتفاع وارد بر وتر برابر ضرب قطعات ایجاد شده بر وتر است.

تأیید: به کمک مساحت مثلث اصلی (نی‌ی)؟

کلبرد: مقایسه ارتفاع وارد بر وتر با داشتن ۳ ضلع

$$AH \times a = b \times c$$

مثال: با توجه به مثلث روبه‌رو در هر قسمت مقادیر خواسته شده را با کمترین مقدار مناسبه و به‌دست آورید.

مثال: 

$c = 8, b = 6, h = ?$

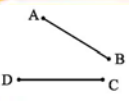
$d = 5, e = 3, b = ?, c = ?$

$h = 5, d = 7, b = ?, e = ?$

(تمرین کتاب) الف) دو پاره‌خط  $AB$  و  $CD$  مطابق شکل داده شده‌اند. نقطه‌ای بیابید که از دو نقطه  $A$  و  $B$  به یک فاصله و از دو نقطه  $C$  و  $D$  نیز به یک فاصله باشد.

ب) نقطه مورد نظر در قسمت الف) را  $O$  می‌نامیم. اگر  $O$  روی عمود منصف پاره‌خط  $BC$  باشد و  $G$  دایره‌ای به مرکز  $O$  و به شعاع  $OA$  باشد، راس‌های چهارضلعی  $ABCD$  نسبت به دایره  $G$  چه وضعیتی دارند؟

**answer**



(تمرین کتاب) فرض کنید نقطه  $A$  به فاصله ۴ سانتیمتر از خط  $d$  باشد. روشن رسم هر یک از مثلث‌های زیر را توضیح دهید.

الف) مثلثی متساوی‌الساقین که  $A$  یک راس آن و قاعده آن بر خط  $d$  منطبق باشد.

ب) مثلثی که شرایط الف) را داشته باشد و طول ساق آن ۶ سانتیمتر باشد.

پ) مثلثی که شرایط قسمت الف) را داشته باشد و مساحت آن  $7\text{cm}^2$  باشد.

**answer**

(تمرین کتاب) در دو ژرفه مقابل  $AB \parallel ST \parallel DC$  است. ثابت کنید که  $\frac{AS}{SD} = \frac{BT}{TC}$

(راهنمایی: یکی از قطرها را رسم کنید.)



**answer**

(تمرین کتاب) در هر مورد با عوض کردن جای فرض و حکم، عکس آن چه داده شده است، بنویسید.

الف) اگر در مثلثی سه ضلع برابر باشند، آنگاه سه زاویه نیز برابر خواهند بود.

ب) در یک مثلث اگر دو ارتفاع نابرابر باشند، «ضلع متناظر به ارتفاع بزرگتر» کوچکتر است از «ضلع مقابل به ارتفاع کوچکتر» (شکل یکشیر و به زبان ریاضی بنویسید).

**answer**

(تمرین کتاب) با پرهان فلغ ثابت کنید نمیتوان از یک نقطه غیرواقع بر یک خط، دو عمود بر آن خط رسم کرد.

**answer**

(تمرین کتاب) هر يك از كلم‌های کلي زیر را با يك مثال نقش رد کنید.  
الف) هیچ عدد اول بزرگتر از ۱۲۷ وجود ندارد.  
ب) در هر مثلث اندازه هر ضلع از اندازه هر ارتفاع بزرگتر است.

**answer**

(تمرین کتاب) بر دیوار یک کعب نظامی نورافکنی به ارتفاع ۶۰ متر قرار گرفته است. خردی در نقطه‌ی A قرار دارد و می‌خواهد فاصله خود را تا پایه نورافکن محاسبه کند. برای این کار چوبی به طول یک متر روی زمین قرار می‌دهد و مشاهده می‌کند که طول سایه چوب برابر ۵ متر است. فاصله این مرد تا نورافکن چقدر است؟

**answer**

(تمرین کتاب) در شکل مقابل دو مثلث قائم‌الزاویه مشاهده می‌کنید. نسبت محیط‌ها و مساحت‌های آن‌ها را به دست آورید.

**answer**

(تمرین کتاب) دو مثلث ABC و A'B'C' را با نسبت تشابه k در نظر بگیرید. به گونه‌ای که  $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = k$  باشد. حال ارتفاع‌های AH و A'H' و A'H' و A'H' را در دو مثلث رسم کنید. الف) ثابت کنید مثلث‌های AHB و A'H'B' متشابه‌اند. ب) نسبت  $\frac{AH}{A'H'}$  را به دست آورید. ت) نسبت مساحت‌ها و محیط‌های دو مثلث ABC و A'B'C' را به دست آورید.

**answer**

(امتحانات سال گذشته) در شکل زیر مقادیر مجهول را محاسبه کنید.

**answer**

(امتحانات سال گذشته) در شکل زیر PQ موازی BC است. مقادیر x و y را محاسبه کنید.

**answer**





**آشنایی با برخی از انواع توابع**

توابع گویا: تابعی که ضابطه‌اش به صورت  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$  باشد به طوری که  $Q(x) \neq 0$  و  $P(x)$  و  $Q(x)$  دو چند جمله‌ای باشند و  $Q(x) \neq 0$

مثلاً توابعی نظیر  $y = x^2$  ،  $y = \frac{x-1}{x}$  ،  $y = 2$  ،  $y = \sqrt{x}$  ،  $y = \frac{x^2-1}{x^2+5x+2}$  و ... گویا هستند.

دامنه توابع گویا، می‌شود همه اعداد حقیقی، به غیر از آن‌ها که مخرج کسر را صفر می‌کنند.

مثال: عبارت زیر را کامل کنید.

چون مخرج کسر  $\frac{1}{x}$  نمی‌تواند ..... باشد، پس ..... نمی‌تواند در دامنه تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{1}{x}$  باشد، بنابراین نمودار تابع  $f(x) = \frac{1}{x}$  محور ..... را قطع نمی‌کند.

**تساوی دو تابع**  $f(x) = g(x)$   $D_f = D_g$  **۱** و **۲**  $f$  و  $g$  باهم مساویند اگر

**ex**  $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \\ g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \end{cases}$

**ex**  $\begin{cases} f(x) = \sqrt{4x^2 - 4x^2 + 1} \\ g(x) = |2x^2 - 1| \end{cases}$

مثال: آیا دو تابع زیر مساویند؟ برای پاسخ خود دلیل ارائه کنید.

$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 - x} \\ g(x) = \sqrt{x} \times \sqrt{x-1} \end{cases}$

**answer**

**توابع رادیکالی**

ساده‌ترین تابع رادیکالی  $y = \sqrt{x}$  است که دامنه آن مقادیر بازه  $[0, \infty)$  است. نمودار آن که به نمودار آبرویی معروف است به صورت روبه‌رو است. روشن رسم توابع رادیکالی به فرم  $y = \sqrt{ax+b}$  ؛ دامنه‌اش را مشخص کن، سپس یک آبرو در دامنه‌اش رسم کن.

مثال: نمودار  $y = -2\sqrt{-x+1} + 3$  را رسم کنید.

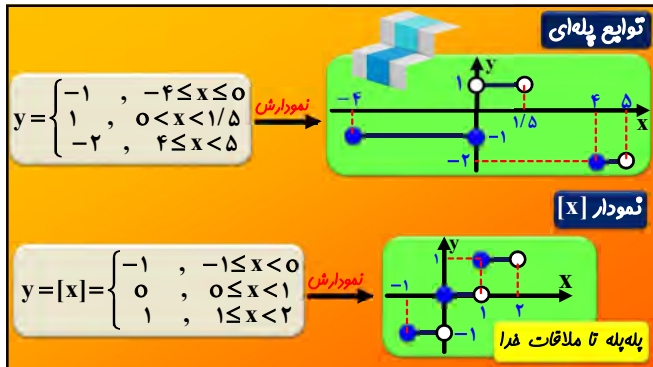
**مفهوم جز صحتیح (پراکت)**

جز صحتیح هر عدد می‌شود اولین عدد صحتیح کوچکتر از خودش! نمادش  $[ ]$  است.

**ex**  $[3/7] = 3$  **ex** if  $x > 1$  ,  $[\frac{x^2+1}{x}] = ?$

**ex**  $[-3/3] = -4$  **ex**  $[-6] = -6$  جز صحتیح هر عدد صحتیح می‌شود خودش!

**ex**  $[\frac{1}{x^2+1}] = 0$  **ex** if  $\sin x \neq 0$  ,  $[1 - \sin^2 x] = ?$



**تابع یک به یک**

**تشخیص (به) بودن از زوج مرتب**

هیچ دو زوج مرتب متمایزی نه مقصدهای اول برابر دارند (برای تابع شدن)، نه مقصدهای دوم برابر (برای یک به یک شدن)

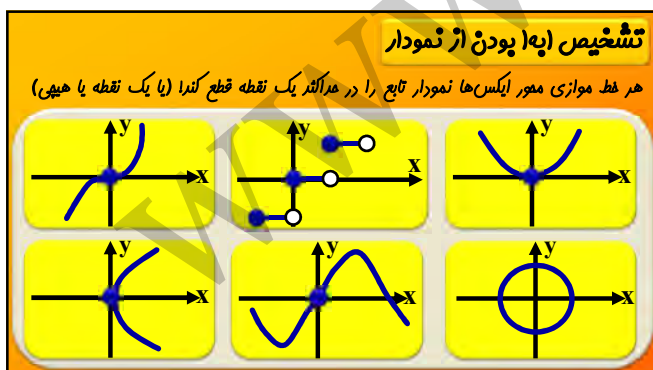
$R = \{(1, 2), (-1, 4), (2, 3), (5, 1)\}$  ✓

$R = \{(1, 2), (-1, 4), (2, 3), (1, 1)\}$  ✗

$R = \{(1, 2), (-1, 4), (2, 3), (3, 3)\}$  ✗

**T** اگر رابطه  $f = \{(3, 2), (a, 5), (2, a^2 - a), (b, 2), (-1, 4)\}$  تابع یک به یک باشد، نمودار تابع  $g(x) = ax + b$  محور طول ها را در چه نقطه ای قطع می کند؟ (1)  $(3, 0)$  (2)  $(-\frac{7}{3}, 0)$  (3)  $(-2, 0)$  (4)  $(\frac{7}{3}, 0)$

**A**



**تابع معکوس** هر تابع مانند  $f$  یک وارون ( $f^{-1}$ ) دارد. حالا اگر  $f^{-1}$  خود یک تابع باشد می‌گوییم  $f$  معکوس پذیر است. (آهه کاهی  $f^{-1}$  یک تابع نیست!)

**توجه** شرط لازم و کافی معکوس پذیری تابع  $f$  این است که  $f$  یک به یک باشد

**محاسبه وارون در زوج مرتب ها** جای ایکس (په) و ایکس (پدر مادر) رو عوض کن!

$f = \{(1, 2), (2, 3), (5, 3)\} \rightarrow f^{-1} = \{(2, 1), (3, 2), (3, 5)\}$  ✗

$g = \{(1, 4), (2, 3), (5, 6), (0, 1)\} \rightarrow g^{-1} = \{(4, 1), (3, 2), (6, 5), (1, 0)\}$

**توجه**  $D_f = R_{f^{-1}}$  &  $R_f = D_{f^{-1}}$

**بدست آوردن نمودار وارون** کافی است قرینه‌ی نمودار  $f$  نسبت به نیمساز تأیید اول و دوم را به‌درست بیاورید نمودار  $f^{-1}$  آماده‌ست! نوش جان!

**ex** if  $f(x) = 2x - 3$  then  $f^{-1}(x) = ?$

**بدست آوردن ضابطه‌ی  $f^{-1}$**

**کام اول** بهای  $f(x)$  بنویسید و سعی کنید  $x$  رو بر حسب  $y$  بدست بیارید ( $x$  رو تعویض کنید!)

**کام دوم** بهای  $y$  بنویسید و بهای  $x$  بنویسید  $f^{-1}(x)$  تمام!

**ex** if  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{8+9x}}$  then  $f^{-1}(x) = ?$

**ex** if  $f(x) = \frac{1}{8}(3x+1)^2$  then  $f^{-1}(x) = ?$

**ex** if  $f(x) = \frac{2x-1}{3x-2}$  then  $f^{-1}(x) = ?$

مثال: تابع وارون تابع زیر را بیابید.

**answer**

**اعمال جبری روی توابع**

**۱ جمع**  $D_{f+g} = D_f \cap D_g \rightarrow (f+g)(x) = f(x) + g(x)$  هر دو (y) با هم جمع کنید!

**EX**  $f(x) = 2x^2 - 3$   $g(x) = \frac{2x}{x-1} \rightarrow (f+g)(2) = f(2) + g(2) = 5 + 4 = 9$

**۲ تفریق**  $D_{f-g} = D_f \cap D_g \rightarrow (f-g)(x) = f(x) - g(x)$  هر دو (y) از هم کم کنید!

**EX**  $f(x) = 2x^2 - 3$   $g(x) = \frac{2x}{x-1} \rightarrow (f-g)(1) = f(1) - g(1) = ??$

**EX**  $f(x) = 2\sqrt{x-2}$   $g(x) = \frac{2x}{x+3} \rightarrow (f-g)(x) = 2\sqrt{x-2} - \frac{2x}{x+3}; x \geq 2$

**۳ ضرب**  $D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g \rightarrow (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$  هر دو (y) در هم ضرب کنید!

**EX**  $f(x) = x^2 - 6x + 8$   $g(x) = \frac{x}{x-2} \rightarrow (f \cdot g)(x) = x^2 - 6x; x \neq 2$

**EX**  $f = \{(1, 2), (-1, 4)\}$   $g = \{(1, 3), (2, 4)\} \rightarrow (2f \cdot g) = \{(1, 12)\}$

**۴ تقسیم**  $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\} \rightarrow (\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$  هر دو (y) بر هم تقسیم کنید!

**EX**  $f(x) = x^2 - 4$   $g(x) = x - 2 \rightarrow (\frac{f}{g})(2) = \frac{f(2)}{g(2)} = ??$

**EX**  $(\frac{f}{g})(0) = \frac{f(0)}{g(0)} = ??$   $(\frac{f}{g})(-3) = \frac{f(-3)}{g(-3)} = -1$

مثال: دو تابع  $f(x) = \frac{1}{x}$  و  $g(x) = \sqrt{x+1}$  را در نظر بگیرید. دامنه و شرایط تابع  $f \pm g$ ،  $f \times g$  و  $\frac{f}{g}$  را بیابید

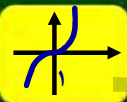
**answer**

مثال: توابع  $f(x) = x^2 - 3$  و  $g(x) = -2$  داده شده اند. الف) نمودار تابع  $g + f$  را رسم کنید. (راه حل نوشته شود). ب) مقدار  $(f.g)(\bullet)$  را محاسبه کنید.

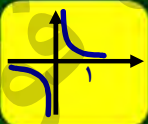
**answer**

**انتقال** ببینیم با حرکت از اعمال زیر، نمودار تابع  $f(x)$  چگونه انتقال می یابد:

**۱**  $f(x) + k$   
نمودار  $f(x)$  را  $k$  واحد و در جهت علامت  $k$  روی محور  $y$  ها حرکت بدهد

**ex**  $y = x^3 - 1$  

**۲**  $f(x + k)$   
نمودار  $f(x)$  را  $k$  واحد در خلاف جهت علامت  $k$  روی محور  $x$  ها حرکت بدهد

**ex**  $y = \frac{1}{x-1}$  

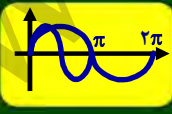
مثال: نمودار تابع  $y = -2(x-1)^2 + 1$  را به کمک انتقال رسم کنید.

**answer**

**۳**  $kf(x)$   
عرض نقاط روی نمودار  $f(x)$  را  $k$  برابر کن (سقف و کف  $k$  برابر شه)

**ex**  $y = -2 \cos x$  

**۴**  $f(kx)$   
طول نقاط روی نمودار  $f(x)$  را  $\frac{1}{k}$  برابر کن (در واقع دامنه  $\frac{1}{k}$  برابر شه)

**ex**  $y = \sin 2x$  

کتاب درسی: نمودار تابع با شرایط  $g(x) = -3 + \sqrt{x-4}$  را رسم کنید.

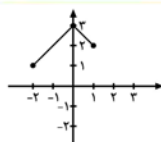
**answer**

(تمرین کتاب) وارون تابع  $f = \{(2,3)(-2,1)(-1,2)\}$  را به دست آورید.

answer

(تمرین کتاب) نمودار وارون تابع داده شده در شکل زیر را رسم کنید.

answer



(کتاب درسی) حاصل عبارت‌های زیر را حساب کنید.

answer

الف)  $[300/4002]$

ب)  $[-103/003]$

پ)  $[-2309/54]$

(تمرین کتاب) تابع پله‌ای روبه‌رو را رسم کنید.

answer

$$f(x) = \begin{cases} 3 & x \in [0, 1) \\ 0 & x \in [1, 5] \\ 1 & x \in (6, 7] \end{cases}$$

(تمرین کتاب) در هر مورد، دامنه و ضابطه حاصل جمع، ضرب، تقسیم و تفریق دو تابع داده شده را بنویسید.

answer

الف)  $f(x) = \frac{x-2}{x+5}$      $g(x) = x^2 + 3x - 10$

(تمرین کتاب) وارون تابع  $f(x) = \frac{-7x+3}{5}$  را به دست آورید.

answer

(تمرین کتاب) با استفاده از نمودار تابع یا ضابطه  $f(x) = \sqrt{x}$ ، نمودار تابع  $g(x) = 1 - \sqrt{x-2}$  را رسم کنید.

answer

(امتحانات سال گذشته) نمودار تابع  $f(x) = (x-1)^2 - 2$  را رسم کنید.

answer

ب)  $f = \{(2,5)(3,4)(0,-2)\}$      $g = \{(-1,2)(0,2)(2,4)(3,0)\}$

answer



(امتحانات سال گذشته) مجموعه جواب معادله  $[2x-1]=3$  را بنویسید.

answer

(امتحانات سال گذشته) اگر  $f(x)=\sqrt{x+3}$  و  $g(x)=\frac{2}{x-2}$  دو تابع باشند.

الف) مقدار  $2(f-g)(1)$  را به دست آورید.      ب) دامنه تابع  $(f \times g)(x)$  را به دست آورید.

answer

(تیزهوشان ۱۳۰۲) تابع  $y=f(x)$  با دامنه  $[-2,1]$  و برد  $[-3,4]$  را در نظر بگیرید. دامنه تابع  $g(x)=-3f(2x)+1$

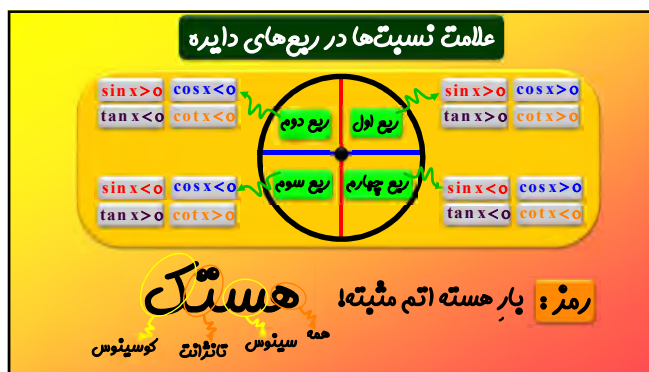
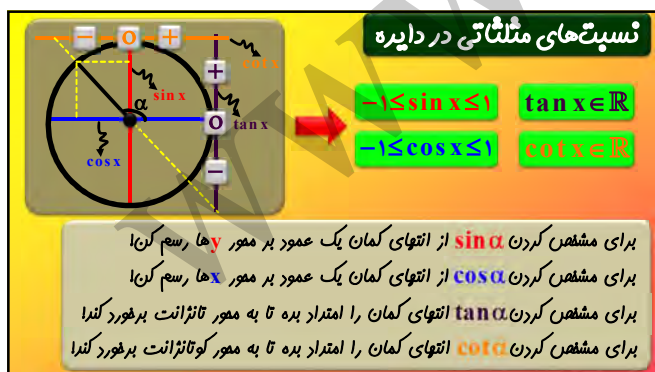
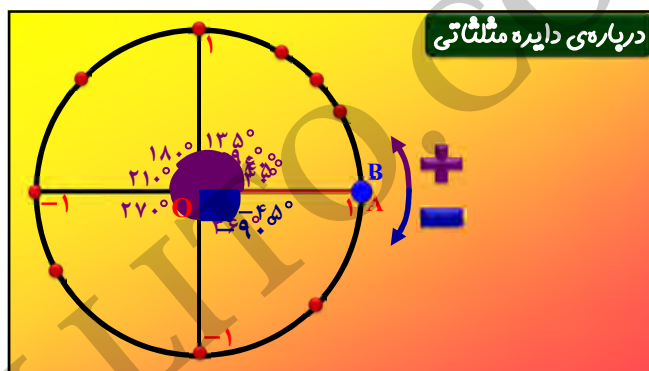
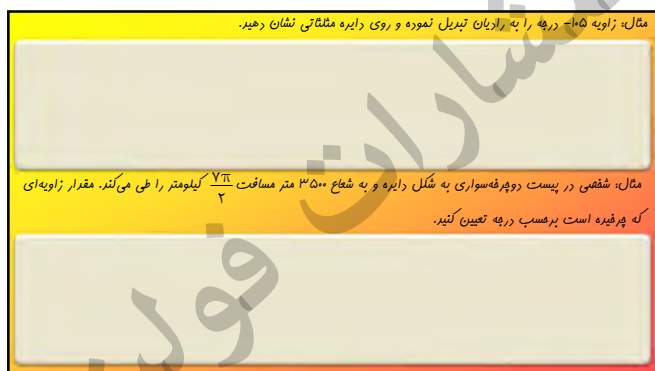
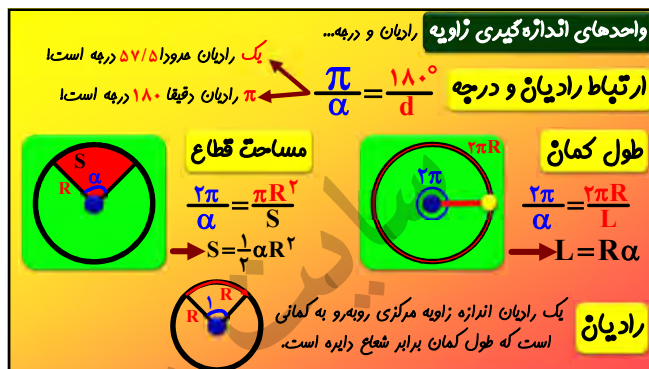
answer

(امتحانات سال گذشته) تابع  $f=(m^2+2,5)(n^2+1,4)$  مفروض است.  $M$  و  $n$  را طوری تعیین کنید که برد وارون  $f$ ،  $\{-7,18\}$  باشد.

answer

(تیزهوشان ۱۳۰۲) اگر تابع خطی  $f$  از نقاط  $(2,1)$  و  $(4,5)$  عبور کند. شایسته وارون آن را به دست آورید.

answer



| نسبت‌های مثلثاتی<br>روایای معروف |      |                      |                                |                                |                                |                                |                       |                                  |  |
|----------------------------------|------|----------------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|-----------------------|----------------------------------|--|
| نسبت                             | کمان | $۰^\circ$ ( $0$ )    | $۳۰^\circ$ ( $\frac{\pi}{6}$ ) | $۴۵^\circ$ ( $\frac{\pi}{4}$ ) | $۶۰^\circ$ ( $\frac{\pi}{3}$ ) | $۹۰^\circ$ ( $\frac{\pi}{2}$ ) | $۱۸۰^\circ$ ( $\pi$ ) | $۲۷۰^\circ$ ( $\frac{3\pi}{2}$ ) |  |
| sin                              | ۰    | ۰                    | $\frac{1}{2}$                  | $\frac{\sqrt{2}}{2}$           | $\frac{\sqrt{3}}{2}$           | ۱                              | ۰                     | -۱                               |  |
| cos                              | ۱    | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$           | $\frac{\sqrt{2}}{2}$           | $\frac{1}{2}$                  | ۰                              | -۱                    | ۰                                |  |
| tan                              | ۰    | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | ۱                              | ۱                              | $\sqrt{3}$                     | ت                              | ۰                     | ت                                |  |
| cot                              | ت    | $\sqrt{3}$           | ۱                              | ۱                              | $\frac{1}{\sqrt{3}}$           | ۰                              | ت                     | ۰                                |  |

سینوس کوسینوس رو واسه هر زاویه حفظ کن! تانژانت و کوتانژانت رو از روشون حساب کن!

**دیگه هیچوقت یادت نمیره!**

تانژانت کوتانژانت  $۳۰^\circ$  و  $۶۰^\circ$  خیلی قاطی میشن! به راه سریع اینه که فقط تانژانت  $۳۰^\circ$  و  $۶۰^\circ$  رو حفظ کنی! کوتانژانتو بدست ازش بیاری... اما حفظ کردن تانژانت! میرونییم تابع تانژانت تو ربع اول آید! پس مقدار کویله واسه زاویه کویکنترس!

$\cot 60^\circ = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$        $\cot 30^\circ = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$

**نسبت‌های مثلثاتی  $(\frac{k\pi}{2} \pm \alpha)$**

ابتدای ربع      انحراف به اندازه  $\alpha$  از ابتدای ربع

$\sin(\frac{k\pi}{2} \pm \alpha) =$  **نسبت**  $(\alpha)$  **علامت**

آله ابتدای ربع داده شده مشرب فرد نور درجه بود، سینوس کوسینوس به هم و تانژانت کوتانژانت به هم تبدیل میشن! در غیر این صورت تغییری رخ نمیره!

بین کمان داده شده در کدام ربع است و علامت نسبت در آن ربع را بدست بیاورید و تمام!

ex  $\sin(\frac{3\pi}{4})$

ex  $\tan(30^\circ)$

**روایای متمم و مکمل**

**متمم**  
if  $\alpha + \beta = 90^\circ$

$\sin \alpha = \cos \beta$      $\cos \alpha = \sin \beta$   
 $\tan \alpha = \cot \beta$      $\cot \alpha = \tan \beta$

**مکمل**  
if  $\alpha + \beta = 180^\circ$

$\sin \alpha = \sin \beta$      $\cos \alpha = -\cos \beta$   
 $\tan \alpha = -\tan \beta$      $\cot \alpha = -\cot \beta$

جمع لوتایی که قرینه همن صغرها

**T خلاصه شده  $\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos \alpha$      $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$      $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$      $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$      $\cos \alpha(3)$      $\sin 2\alpha(2)$      $-\sin 2\alpha(1)$  کدام است؟**

۴ صفر    ۱ کنگر    ۲ دانی

**A**

۱)  $\sin(210^\circ) =$

۲)  $\cot(135^\circ) =$

۳)  $\cot(\pi + 2\alpha) =$

**تکلیف منفی داخل کمان فقط کوسینوس منفی خوار است!**

$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$   $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$   $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$   $\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$

Why?

$\tan(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin \alpha}{\cos \alpha}$

$\cot(-\alpha) = \frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \frac{\cos \alpha}{-\sin \alpha}$

مثال: حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$\frac{\cos(-90^\circ) + \sin(-270^\circ)}{\sin(-180^\circ) - \cos(-360^\circ)}$$

**فرمولای مقدماتی مثلثات**

۱  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

EX) if  $\sin \alpha = \frac{-1}{4} \rightarrow \cos \alpha = ?$  ( $\frac{10.27\pi}{4} < \alpha < \frac{514\pi}{4}$ )

۲  $\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha}$  ۳  $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$

فرمولای  
تقره‌ای

۱  $\pm \sin^2 \alpha \rightarrow \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$  ۴  $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$

۱  $\pm \cos^2 \alpha \rightarrow \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$  ۵  $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

مثال: اگر  $\cos x = \frac{-4}{5}$  و  $\sin x > 0$  سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه  $x$  را بیابید.

مثال: اگر  $\cot \alpha = -2$  و  $\cos \alpha > 0$  سایر نسبت‌های مثلثاتی  $\alpha$  را بیابید.

**دوره تناوب توابع مثلثاتی**

مفهوم دوره تناوب: به تابعی که نمودارش به ازای یک طول مشخص تکرار شود تناوب می‌گوئیم. به کوچکترین طولی که نمودار تابع در آن تکرار می‌شود، دوره تناوب آن می‌گوئیم و با نشان می‌دهیم.

$T \in \mathbb{Q}$

$y = (-1)^{|x|}$

$T=1$   $T=2$

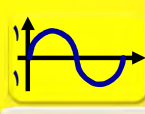
**دوره تناوب توابع مثلثاتی**

$k \sin(ax+b)+c \rightarrow T = \frac{2\pi}{|a|}$ 
 $k \tan(ax+b)+c \rightarrow T = \frac{\pi}{|a|}$ 
 $k \cos(ax+b)+c \rightarrow T = \frac{2\pi}{|a|}$ 
 $k \cot(ax+b)+c \rightarrow T = \frac{\pi}{|a|}$

**T** دوره تناوب تابع با ضابطه  $f(x) = 2 \sin(\frac{x}{2}) - 1$  با دوره تناوب کدام تابع زیر برابر است؟

$\checkmark f(x) = 2 \tan(\frac{x+2}{\lambda})(2)$ 
 $f(x) = 4 \cos(2x+1) - 2(1)$ 
 $f(x) = 2 \tan(\frac{x}{2}) - 2(2)$ 
 $f(x) = \sin(\frac{1-2x}{2})(2)$

**توابع مثلثاتی ۱**  $y = \sin x$


 $y = \sin x$ 
 $x \in [0, 2\pi]$ 
 $D_{\sin x} = \mathbb{R}$ 
 $R_{\sin x} = [-1, 1]$

EX)  $y = 2 \sin(\pi x) - 1$

مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید؟

$y = -\sin x + 1$ 
 $y = |\sin x|$ 
 $y = 2 \sin x$

**توابع مثلثاتی ۲**  $y = \cos x$


 $y = \cos x$ 
 $x \in [0, 2\pi]$ 
 $D_{\cos x} = \mathbb{R}$ 
 $R_{\cos x} = [-1, 1]$

EX)  $y = -2 \cos(-\frac{x}{2}) + 1$

مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید؟

$y = \frac{\pi}{2} + 2 \cos(-x)$ 
 $y = \cos(x + \frac{\pi}{2})$

(تمرین کتاب) زاویه  $D$  برابر با  $\frac{\pi}{2}$  رادیان است. اندازه این زاویه چند درجه است؟

(تمرین کتاب) دایره‌ای به شعاع ۱۰ سانتیمتر مفروض است. اندازه زاویه مرکزی مقابل به کمانی به طول ۸ سانتیمتر از این دایره چند رادیان است؟



(تمرین کتابی) حاصل هر یک از عبارات‌های زیر را به‌دست آورید.

الف)  $\cos(-72^\circ) + \cot(-60^\circ) + \tan 72^\circ - \tan(-60^\circ)$

ب)  $\cos(-210^\circ) + \cot(240^\circ)$

پ)  $\sin 63^\circ + \tan(-54^\circ)$

ث)  $\sin(\frac{25\pi}{4}) - \cos(\frac{22\pi}{4})$

ج)  $\frac{\sin \frac{7\pi}{4} - \cos \frac{5\pi}{4}}{\sin(-\frac{7\pi}{4}) + \tan(-\frac{7\pi}{4})}$

(تمرین کتابی) با توجه به نمودار توابع سینوس و کسینوس، مشخص کنید هر یک از دو نمودار زیر، کدام یک از ضابطه‌های داده شده را دارند؟ نمودار تابع یا سایر ضابطه‌ها را نیز رسم کنید.

الف)  $y = 2 \cos x + 1$

ب)  $y = 2 \sin x - 1$

پ)  $y = 2 - \cos x$

ث)  $y = \sin x - 2$

(تمرین کتابی) با ذکر دلیل مشخص کنید کدام یک از گزاره‌های زیر درست و کدام نادرست‌اند؟

الف) شکل روبه‌رو نمودار تابع یا ضابطه  $y = \frac{1}{4} \sin x$  را نشان می‌دهد.

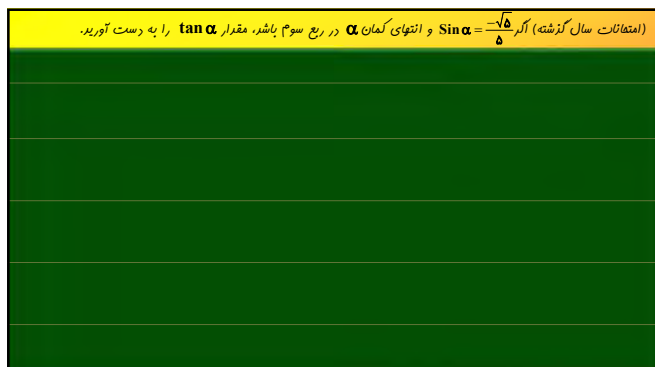
ب) شکل روبه‌رو نمودار تابع یا ضابطه  $y = \cos x - \frac{1}{4}$  را نشان می‌دهد.

پ) برای رسم نمودار تابع یا ضابطه  $y = 1 + \sin x$  کافی است نمودار تابع سینوس را به اندازه یک واحد به موازات محور X انتقال دهیم.

ث) برای رسم نمودار تابع یا ضابطه  $y = -\cos x$  کافی است نمودار تابع کسینوس را نسبت به محور X قرینه کنیم.

(امتحانات تیزهوشان ۱۳۰۲) در دایره‌ای به محیط  $16\pi$  طول کمان مقابل به زاویه  $150^\circ$  چقدر است؟

(امتحانات سال گذشته) مقدار  $y = 4 \cos(2x + \frac{\pi}{4})$  را به ازای  $x = \frac{\pi}{6}$  به دست آورید.





**تابع نمایی** تابع به فرم  $y=a^x$  را نمایی می‌گوییم. (پایه‌اش عدد است و توانش مجهول)

**شروط لازم** برای آنکه تابع  $y=a^x$  نمایی شود این است که اولاً  $a>0$  ثانیاً  $a \neq 1$

**ویژگی‌ها**

- بکتوای آکبر ← یک به یک ← معکوس پذیر
- دامنه  $\mathbb{R}$  ← برد  $\mathbb{R}^+$
- طول از مبدا ← عرض از مبدا

$y=a^x$   $a>1$   $y=a^x$   $0<a<1$

**مقایسه رشد توابع نمایی** نمودارهای زیر، کوبای همگی نکات و چرئیات می‌باشند

فقط قسمتی مثبت نمودارو یاد بگیر، قسمت منفی چوئن برعکسه

مثال: نمودار توابع زیر را در یک دستگاه مختصات رسم کنید و وضعیت آن‌ها را نسبت به هم مقایسه کنید.

$y=2^x, y=3^x, y=5^x$

مثال: نمودار توابع زیر را در یک دستگاه مختصات رسم کنید و وضعیت آن‌ها را نسبت به هم مقایسه کنید.

$y=(\frac{1}{2})^x, y=(\frac{1}{3})^x, y=(\frac{1}{5})^x$

**نکته** وقتی می‌کن فلان تابع نماییه یعنی ضابطش این شکلیه  $y=ma^x$

**T** جدول زیر مقادیر یک تابع نمایی را مشخص می‌کند،  $a+b$  کدام می‌تواند باشد؟

|   |    |     |   |  |
|---|----|-----|---|--|
| x | ۴  | ۶   | b |  |
| y | ۲۵ | ۱۲۵ | a |  |

۶۱۸(۴) ۷۲۵(۳) ۶۲۵(۲) ۶۳۳(۱) ✓

**معادلات نمایی** اگر  $b$  یک عدد مثبت باشد و  $b^x = b^y$  ، آنگاه  $x = y$  و برعکس.

مثال: معادله‌های زیر را حل کنید.

$$4^{2x-1} = 8^{x+1}$$

$$5^{3x-1} = 125^{2x+1}$$

**نامعادلات نمایی** برای حل موفقیت‌آمیز به نامعادله نمایی باید به جهت یکنوازی بودن دقت کنی...

$y = a^x$   
 $a > 1$

$x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} \leq a^{x_2}$

جهت تغییرات  $x$  و  $y$  یک‌جهت است

$y = a^x$   
 $0 < a < 1$

$x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} \geq a^{x_2}$

جهت تغییرات  $x$  و  $y$  برعکس هم‌رکس است

مثال: مجموعه جواب نامعادلات زیر را بدست آورید

$$3^{x-3} \leq \frac{1}{(3^2)^3}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+5} < \left(\frac{1}{3}\right)^7$$

**تابع لگاریتمی** معکوس تابع نمایی است، یعنی:  $y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y$  مبنا

**دامنه آن** شروط دامنه  $y = \log_a B$  می‌شود:  $A > 0$  و  $B > 0$  و  $A \neq 1$

$y = \log_a x$   
 $a > 1$

$y = \log_a x$   
 $0 < a < 1$

**ویژگی‌ها**

- یکنوازی: یک‌به‌یک و معکوس‌پذیر
- دامنه:  $\mathbb{R}^+$  برد:  $\mathbb{R}$
- طول از مبدأ: 1 عرض از مبدأ: 0

مثال: (سنجش) دامنه تابع  $y = \log_{\left(\frac{25-x^2}{x}\right)}$  شامل چند عدد صحیح است؟

۱  $\log_a 1 = 0$     ۲  $\log_a a = 1$     ۳  $\log_a x^m = \frac{m}{n} \log_a x$

۴  $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$     ۵  $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

۶  $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$     ۷  $\log_a \frac{x}{y} = \frac{\log_a x}{\log_a y}$

۸  $\log_a \frac{x}{y} = \frac{\log_a x}{\log_a y}$     ۹  $\log_a \frac{x}{y} = \frac{\log_a x}{\log_a y}$

مثال: (مثال کتاب) اگر  $\log^2 = 0.3$  و  $\log^5$  حاصل  $\log^5$  را بیابید.

مثال: اگر  $\log^5 = 0.7$  و  $\log^2 = 0.27$  و  $\log^4 = 0.84$  باشد، مقدار  $\log \frac{12 \times 7^2}{25}$  را به دست آورید.

مثال: معادله‌ی زیر را حل کنید.  
 $\log_2^{(x+1)} + \log_2^{(x+4)} = 2$

مثال: (فعالیت کتاب) نمودار هر تابع را به ضابطه آن تغییر کنید.

الف)  $f(x) = 2^x + 1$

ب)  $g(x) = \log(x-1)$

مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$y = -\log(x-1)$

$y = -2^{-x} + 1$

کاربرد لگاریتم در زلزله

انرژی آزاد شده از یک زلزله‌ی  $M$  ریشتری را با  $E$  نشان می‌دهند

که واحدش یک است و از فرمول روبرو بدست می‌آید:

$\log E = 11/8 + 1/5 M$

در زلزله‌ای به بزرگی  $4/8$  ریشتر، مقدار انرژی آزاد شده چقدر است؟

۱۰<sup>۲۱</sup> (۴)      ۱۰<sup>۲۰</sup> (۳)      ۱۰<sup>۱۹</sup> (۲) ✓      ۱۰<sup>۱۸</sup> (۱)

A



(تمرین کتاب) معادله‌ی نمایی زیر را حل کنید.

$$9^x = 3^{x^2 - 4x}$$

(تمرین کتاب) کدام گزاره صحیح است؟

الف) نقطه  $(\frac{1}{2}, \sqrt{5})$  روی نمودار تابع با ضابطه  $y = 5^x$  قرار دارد.

ب) محل تقاطع نمودار تابع با ضابطه  $y = 10^x$  با محور  $y$ ها، نقطه  $(0, 10)$  است.

پ) دامنه توابع با ضابطه‌های  $y = 2^x$  و  $y = x^2$  مساوی‌اند.

ت) محل تقاطع نمودار تابع با ضابطه  $y = 6^x$  با محور  $x$ ها، نقطه  $(0, 6)$  است.

(تمرین کتاب) اگر  $f(x) = 3 - 2 \log_2(\frac{x}{5})$  مقدار  $f(42)$  را به دست آورید.

(تمرین کتاب) حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$3 \log_{10} \sqrt{1000}$$

$$\log_3 \frac{1}{27^2}$$

(تمرین کتاب) معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

$$\log_3(p^y - 2) = \log_3 p$$

$$\log_8(x+1) + \log_8(x-1) = 1$$

(تمرین کتاب) اگر نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = \log_a x$  از نقطه  $(2, 2)$  عبور کند، مقدار  $a$  را به دست آورید.

(تمرین کتاب) نمودار تابع با ضابطه  $y = 3^x - 1$  را در بازه  $[-2, 2]$  رسم کنید.

(تمرین کتاب) فرض کنیم  $g(x) = 2^x + 2$ .  
(الف)  $g(-1)$  را به دست آورید. (ب) اگر  $g(x) = 66$ ، مقدار  $x$  چقدر است؟

(امتحانات سال گذشته) نامعادله  $8^{p-2} \leq \frac{1}{256}$  را حل کنید.

(امتحانات سال گذشته) جاهای خالی را پر کنید.  
(الف) دامنه تابع  $y = (\sqrt{3})^x$  برابر ..... و برد آن برابر ..... است.  
(ب) تابع  $y = \log_{\frac{1}{2}} x$  تابعی یک به یک ..... در نتیجه معکوس پذیر .....  
(پ) نمودار تابع  $y = (\frac{1}{6})^x$  محور عرض ها را در نقطه ای به عرض ..... قطع می کند.  
(ت) نمودار تابع  $y = \log_8 x$  محور طول ها را در نقطه ای به طول ..... قطع می کند.

(امتحانات سال گذشته) اگر  $\log_c a = \frac{3}{4}$  و  $\log_c b = \frac{5}{4}$  باشد، مقدار  $\log_b a^{\sqrt{b}}$  را بیابید.

(امتحانات سال گذشته) حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.  
(الف)  $2 \log_8 2 - \log_8 3 = \log_8 2 + \log_8 9$

(ب)  $4(\log_2 \sqrt{5} - \log_2 2) = ?$

(ج)  $\log 15 = ?$  ( $\log 2 = a, \log 3 = b$ )



**مفهوم حد** در راست تابع  $f$  در نقطه‌ی  $a$  را با  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  نشان می‌دهند.

و مفهومش این است که وقتی  $x$  به  $a$  نزدیک میشود از مقادیر بیشتر، عرض به  $L_1$  میل میکند.

در پیش را هم در این بیندرا

$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_1$      $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_2$

**تابع  $f$  در  $a$  حد دارد اگر**

اولا در یک همسایگی اطراف  $a$  تعریف شود.

ثانیا مقادیر در راست و پیش در  $a$  برابر شود.

**ex** آیا تابع  $y = \sqrt{4-x^2}$  در نقاط به طول ۲، ۱- و ۳ حد دارد؟ اگر بله مقدارش را

**توجه** در یک تابع در  $a$  و مقدارش در این نقطه به هم هیچ ربطی ندارند

مثال: (تمرین کتاب) برای تابع  $f$  که نمودار آن داده شده است، کدام یک درست و کدام یک نادرست است؟

$f(1) = 2$  (پ)

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$  (الف)

$f(2) = 1$  (پ)

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$  (ت)

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  وجود ندارد

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$  (ج)

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$  (ث)

مثال: (تمرین کتاب) آیا هر تابع زیر در  $x = 2$  موجود است؟

$f(x) = \begin{cases} -x+2 & x > 2 \\ -2 & x = 2 \\ x-3 & x < 2 \end{cases}$

مثال: نمودار دو تابع  $f(x) = \frac{x-3}{x-2}$  و  $g(x) = 1$  را رسم کنید. آیا  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  موجود است؟ (چرا؟)

$\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$  چگونه در چه نقطه‌ای هر دو تابع با هم برابرند؟

مثال: (تمرین کتاب) اگر  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$  و  $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = -1$  هرهای زیر را در صورت وجود بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3f(x)}{g(x) - 5h(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (h(x))^5$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) + h(x))$$

**محاسبه حدود** ← **اصول اربعه سرهنگی**

اولین گام در محاسبه‌ی حدود یک جایگزاری درست و اصولی است! به اصول اربعه‌ی (دکانه) من در محاسبات دری کوش فرا دهید تا از رستگاران این فصل بشیر!

**Rule No.1**

چندجمله‌ای      نمایی لگاریتمی      رادیکالی      مثلثاتی

جایگزاری ساده انجام می‌دهیم!

اینجا برامون مهم نیست که  $x \rightarrow a^+$  یا  $x \rightarrow a^-$  یا  $x \rightarrow a$  فوراً رو جایگزاری میکنیم!

**توجه** وقتی بهای ایکس‌ها قرار می‌دهیم  $a$ ، درواقع  $a$  نسبی را جایگزاری میکنیم نه  $a$  مطلق!

**ex** شکل زیر نمودار تابع  $f$  است. با توجه به آن حاصل حد داده شده را بیابید! باتشکر!

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) + 2x \cos((x-1)\pi)}{2x - 2 + f(-x-1)} = ?$$

**Rule No.2** ← **رفتار درست با جزصیح**

جزصیح رو به چشم به عدد ببینید! یعنی هرهای حد، به پرکلت زدی اول اونو تعیین مقدار کن!

اگر داخل پرکلت صیح شه، یکبار دیکه با دقت جایگزاری را تکرار کنید (فوراً که کمتر یا بیشترش)

اگر داخل پرکلت غیرصیح شه، همان را حساب کنید (رو جایگزاری کن! پخشش...)

**ex**  $\lim_{x \rightarrow 1/5} [-2x]$

**ex**  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x + \sin \pi x}{2x - 2 + \left| \frac{-x}{3} - 1 \right|}$

**Rule No.3** ← **رفتار درست با قدرمطلق**

اگه بعد از جایگزاری داخل قدر مطلق صفر شه باید تعیین علامت شود! والسلام!

**ex**  $\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{|x-2| - |-x|}{\sqrt{-x+2}}$

**ex**  $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{|x^2-1|}{x[-x+1]+1}$

**رفع ابهام**  $\frac{0}{0}$  (سایه! پاشن بکنه سق سایه!)

وقتی  $x \rightarrow a$ ، به  $(x-a)$  میگوییم **عامل صفرساز**! با حذف عامل صفرساز از صورت و مخرج

**ex**  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^2+2x-3}$       ابهام  $\frac{0}{0}$  را رفع می‌کنیم!

**روش‌های رفع ابهام**  $\frac{0}{0}$

اگر صورت و مخرج چندجمله‌ای بود، میتوان با استفاده از **اتماها** یا **تقسیم** صورت و مخرج

**تجزیه** بر عامل صفرساز (سق سایه)، آنها را تجزیه و عامل صفرساز را از صورت و مخرج خط زدا

**ex**  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x^2 - 2x + 2}{x^2 - 1}$

۲. ایهام  $\frac{0}{0}$  در رادیکال ها، رادیکال فرجه ۲، صورت و مخرج ضرب در مزدوج رادیکال ...

رادیکال فرجه ۳، یار اتمار پاق و لاغر یفتیدر(صورت و مخرج ضرب در در عبارت پاق یا لاغر رادیکال)

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x+6} + x}{(x^2 + 8)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{2x+2}}{\sqrt{x+2} - 2}$$

**پیوستگی** تابع  $f$  در  $a$  پیوسته است اگر بتوان بدون برداشتن قلم از روی کاغذ نمودارش را آتبا رسم کرد

**تعریف ریاضی** تابع  $f$  در  $a$  پیوسته است هرگاه در این نقطه موجود و با مقدارش برابر باشد

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

مثال: نمودار تابع  $f(x) = \begin{cases} x-2 & x < 2 \\ -2 & x = 2 \\ -x+2 & x > 2 \end{cases}$  را رسم کنید. سپس وضعیت پیوستگی آن را روی نقاط دامنه اش بررسی کنید.

مثال: مقدار  $a$  و  $b$  را طوری بیابید که تابع  $f(x) = \begin{cases} bx-1 & x < 2 \\ a & x = 2 \\ x+a & x > 2 \end{cases}$  در نقطه  $x=2$  پیوسته باشد.

**پیوستگی راست** اگر فقط در راست و مقدار برابر باشند و این دو با هر چه برابر نباشند

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) = L_1 \neq \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_2$$

**پیوستگی چپ** اگر فقط در چپ و مقدار برابر باشند و این دو با هر راست برابر نباشند

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a) = L_2 \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_1$$

مثال: تابع  $f(x) = \sqrt{x-2}$  با نمودار مقابل را در نظر بگیرید.

الف) کدام یک از جدهای  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$  موجودند؟

ب) آیا  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  موجود است؟

پ) آیا تابع در  $x=2$  پیوسته است؟

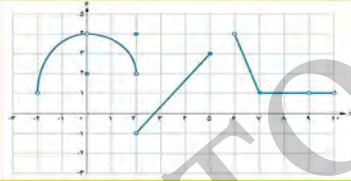


| پیوستگی روی یک بازه |                                                                                                                                                                                                                                                                         |
|---------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| نوع بازه            | شرط پیوستگی تابع $f$ روی بازه                                                                                                                                                                                                                                           |
| $(a, b)$            | تابع $f$ باید در تمامی نقطه‌های موجود در این بازه، پیوسته باشد.<br>این جوری هم‌بیین: تابع در هیچ‌یک از نقطه‌های این بازه، ناپیوسته نباشد.                                                                                                                               |
| $[a, b]$            | تابع $f$ در بازه‌ی باز $(a, b)$ پیوسته باشد و اصلاً در این بازه نقطه‌ی ناپیوستگی نداشته باشد.<br>تابع در نقطه‌ی $a$ باید پیوستگی راست داشته باشد: $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$                                                                                |
| $(a, b]$            | تابع $f$ در بازه‌ی باز $(a, b)$ پیوسته باشد و اصلاً در این بازه نقطه‌ی ناپیوستگی نداشته باشد.<br>تابع در نقطه‌ی $b$ باید پیوستگی چپ داشته باشد: $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$                                                                                  |
| $[a, b]$            | تابع $f$ در بازه‌ی باز $(a, b)$ پیوسته باشد و اصلاً در این بازه نقطه‌ی ناپیوستگی نداشته باشد.<br>تابع در نقطه‌ی $a$ پیوستگی راست داشته باشد: $f(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$<br>تابع در نقطه‌ی $b$ پیوستگی چپ داشته باشد: $f(b) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ |

|                                                                                                  |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|
| مثال: تابع $f$ با ضابطه مقابل را در نظر می‌گیریم:                                                |
| الف) نمودار $f$ را رسم کنید. (ب) دامنه و پیر $f$ را به دست آورید.                                |
| ج) آیا در دامنه‌اش پیوسته است؟                                                                   |
| د) پیوستگی تابع را روی بازه‌های $[-1, 1]$ و $(2, 5)$ بررسی کنید.                                 |
| $f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x < -1 \\ x^2-1 & -1 \leq x < 2 \\ -x+5 & 2 \leq x < 5 \end{cases}$ |

|                                                                                                                                      |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| (تمرین کتاب) تابع $g$ با ضابطه $g(x) = \begin{cases} -1 & x \in \mathbb{Z} \\ x & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ را در نظر بگیرید. |
| الف) نمودار $g$ را در فاصله $[-4, 2]$ رسم کنید.                                                                                      |
| ب) با استفاده از نمودار $g$ ، هر دو زیر را معاینه کنید.                                                                              |
| $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \dots$                                                                                                |
| $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} g(x) = \dots$                                                                                         |

(تمرین کتاب) نمودار تابع  $f$  به صورت زیر است. فرهای زیر را در صورت وجود به دست آورید.



|                                |                               |
|--------------------------------|-------------------------------|
| $\lim_{x \rightarrow -4} f(x)$ | $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ |
| $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  | $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ |
| $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$  | $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$ |

|                                                                                                                   |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| (تمرین کتاب) با توجه به دامنه تابع، در مورد هر چپ تابع $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$ در نقطه $x = 1$ چه می‌توان گفت؟    |
| (تمرین کتاب) با توجه به دامنه تابع، در مورد هر راست تابع $f(x) = \frac{x}{[x]-2}$ در نقطه $x = 2$ چه می‌توان گفت؟ |

|                                                                                      |
|--------------------------------------------------------------------------------------|
| (تمرین کتاب) مقدار $b$ را طوری تعیین کنید که تابع زیر در $x = -1$ هر داشته باشد:     |
| $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + [x]}{ x } & x < -1 \\ 3x + b & x > -1 \end{cases}$ |

(تمرین کتاب) اگر  $f(x) = \frac{[x]}{x}$ ، نمودار  $f$  را رسم کنید. آیا  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  موجود است؟

(تمرین کتاب) مرهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 1}{x + 2}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x}$

$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 2}{[x] + 1}$

$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x}{[-x]}$

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x}$

$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 [x] - 1}{x - 2}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x^2 + x}$

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$

$\lim_{x \rightarrow -\frac{\delta}{2}} \frac{(x + \pi)(2x + 5)}{(2x + \delta)(x^2 + 1)}$

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x - 2|}{x - 2}$

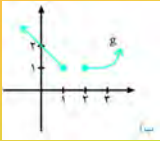
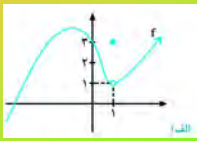
$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{\sin^2 x - \cos^2 x}$

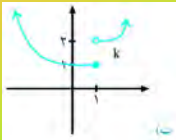
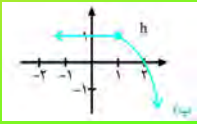
(تمرین کتاب) پیوستگی توابع  $x = 2$ ،  $x = 2$  و  $x = 2$  را در  $x = 2$  بررسی کنید.  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & x \neq 2 \\ 4 & x = 2 \end{cases}$  و  $g(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$  را در  $x = 2$  بررسی کنید.

(تمرین کتاب) با توجه به نمودار تابع  $f$ ،  $f(x) = [x]$ ، در چه نقاطی پیوسته و در چه نقاطی ناپیوسته است؟

(تمرین کتاب) پیوستگی تابع  $f(x) = \begin{cases} -2x + 2 & x \leq 0 \\ x^2 + 2 & x > 0 \end{cases}$  را در نقطه  $x = 0$  بررسی کنید. پیوستگی تابع در نقاط دیگر چگونه است؟

(تمرین کتاب) کدام یک از توابع زیر در  $x=1$  پیوسته است؟

(امتحانات سال گذشته) الف) تابع  $y = x - [x]$  را رسم کنید و سپس وضعیت پیوستگی آن را در بازه‌های  $(0, 1)$  و  $(-1, 0)$  بررسی کنید.  
 ب) آیا تابع در بازه‌های  $(-1, 1)$  پیوسته است؟ چرا؟

(تمرین کتاب) نشان دهید به ازای هیچ مقداری برای  $a$ ، توابع زیر در  $x=0$  پیوسته نیستند.

$$f(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ a & x = 0 \\ 2x+1 & x > 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{ax}{|x|} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

(تمرین کتاب) در توابع زیر مقدار  $a$  را طوری تعیین کنید که هر تابع در  $x=1$  پیوسته باشد.

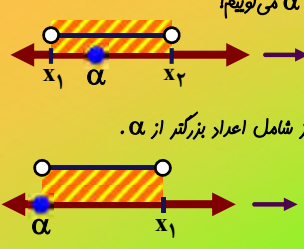
$$h(x) = \begin{cases} \sqrt{x}-1 & 0 < x < 1 \\ \frac{x-1}{[x]}+a & x \geq 1 \end{cases}$$

$$k(x) = ([x]-a)[x]$$

(تمرین کتاب) تابع  $f(x) = [x]$  در بازه  $(2, k)$  پیوسته است. حداکثر مقدار  $k$  چقدر است؟

**همسایگی عدد  $\alpha$**   
 بازه‌ای باز شامل عدد  $\alpha$  را یک همسایگی برای  $\alpha$  می‌گویند.  
 این بازه به همسایگی  $\alpha$  واصله است.  
 if  $\alpha \in (x_1, x_2) \rightarrow$

**همسایگی راست عدد  $\alpha$**   
 بازه‌ای باز شامل اعداد بزرگتر از  $\alpha$ .  
 اگر بازه‌ای  $(a, b)$  به همسایگی راست برای  $\alpha$  باشد آنگاه  
 $\alpha = a$  &  $b > \alpha$



**همسایگی چپ عدد  $\alpha$**

بازه‌ای باز شامل اعداد کوچکتر از  $\alpha$ .

اگر بازه‌ی  $(a, b)$  به همسایگی چپ برای  $\alpha$  باشد آنگاه  $\alpha = b$  &  $a < \alpha$

**همسایگی محذوف عدد  $\alpha$**

مجموعه‌ای شامل اعداد کوچکتر یا بزرگتر از  $\alpha$  که خود  $\alpha$  از آن حذف شده باشد.

اگر بازه‌ی  $(a, b) \cup (c, d)$  به همسایگی محذوف برای  $\alpha$  باشد آنگاه  $\alpha = b = c$  &  $a < \alpha < d$

(تمرین کتاب) تابع  $f$  با شایسته  $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = f(x)$  را در نظر بگیرید.

الف) دامنه تابع  $f$  را به دست آورید.

ب) دامنه تابع شامل همسایگی محذوف کدام نقطه است؟

پ) آیا این تابع در همسایگی  $0/9$  تعریف شده است؟

ت) آیا تابع  $f$  در همسایگی چپ  $x=1$  تعریف شده است؟ در همسایگی راست  $x=1$  چطور؟

(تمرین کتاب) اگر بازه  $(x-1, 2x+3)$  یک همسایگی  $2$  باشد، مجموعه مقادیر  $x$  را به دست آورید.

**مخصوص رشته ریاضی**

روش سوچ: اگر  $\Delta \rightarrow 0$  آنگاه داریم:  $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta}{\Delta} = 1$  و  $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\Delta}{\sin \Delta} = 1$

توجه داشته باشید همگام چلوی  $\sin$  باید با عبارت داخل صورت (یا مخرج) دقیقاً یکی باشد.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 \Delta x}{x^2}$

روش چهارم (تغییر متغیر): هواسه باشد اینجا رو می‌خوانم خودمونی بگم! در مورد یا انجام بده که هم عبارت چپری داشتنی (مثل  $2x - \pi$ ) هم عبارت مثلثاتی (مثل  $\cos x$ ) و گمان به سمت به عبارت دارای  $\pi$  میل می‌کرد تغییر متغیر مسئله را حل کنید. به این صورت که  $x - \alpha = t$  ...

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{|\cos x|}{x - \pi}$

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2x - \pi}{\cos x}$

در محاسبات هری،  $2$  اتحاد زیر را نیاز بسپارید:  $1 - \cos 2\Delta = 2\sin^2 \Delta$  و  $1 + \cos 2\Delta = 2\cos^2 \Delta$

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x - 1}{2x - \pi}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2\cos 2x}{x \sin x}$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x + \frac{\pi}{2})}{\cos x - \sin x}$$

|                          |         |
|--------------------------|---------|
| $\frac{1 - \cos x}{x^2}$ | $x > 0$ |
| $\frac{x}{b-1}$          | $x = 0$ |
| $x - \gamma a$           | $x < 0$ |

(تمرین کتاب) مقدار  $a$  و  $b$  را چنان تعیین کنید که تابع  $f(x) =$  در نقطه  $x = 0$  پیوسته باشد.





**احتمال شرطی**  $P(A|B)$  می‌فوانیم احتمال  $A$  به شرط  $B$ . مفومش این است که  $B$  رخ داده ۱ حالا با این شرط، احتمال وقوع  $A$  را بیابید. درواقع فضای نمونه‌ای پدر ما می‌شود  $B$  و

پیشامد مطلوب ما می‌شود  $A \cap B$  پس  $P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$  و  $P(A \cap B) = \frac{P(A \cap B) \cdot n(S)}{P(B) \cdot n(S)}$

تشخیص مسائل احتمال شرطی با کلماتی مانند «اگر» یا «می‌دانیم» شرطی بر روی فضای نمونه‌ای اعمال می‌شود. البته گاهی شرط پنهان است. (پدر احمد ۳ فرزند دارد. احتمال اینکه ۲ دختر داشته باشد کدام است؟)

روش حل مسائل شرطی: شرط گفته شده را روی فضای نمونه‌ای اصلی اعمال می‌کنیم و یک فضای نمونه‌ای پدر میسازیم! احتمال را روی فضای نمونه‌ای پدر پرست می‌آوریم.

**نکته** از فرمول احتمال شرطی فقط در دو صورت استفاده کن! یک: اگر فضای نمونه‌ای اصلی در دسترس نباشد. دو: اگر مسئله‌ای احتمال شرطی داده شده از نوع «پیری (قوانین احتمال) باشد».

مثال: پدر مهسا ۳ فرزند دارد. احتمال آن که فقط دو تنی آن‌ها پسر باشد کدام است؟

مثال: احتمال وقوع نوعی بیماری در یک جامعه‌ی مشخص برابر  $0.04$  و احتمال این که فردی هم دچار این بیماری شود و هم درمان‌یابد برابر  $0.02$  است. اگر فردی به بیماری مذکور دچار شده باشد، احتمال درمان یافتن او چقدر است؟

**پیشامدهای مستقل** دو پیشامد  $A$  و  $B$  مستقلند اگر وقوع یا عدم وقوع یکی بر دیگری تاثیری نداشته باشد. مثل پرتاب یک سکه و یک تاس.

**تعریف ریاضی دو پیشامد مستقل** دو پیشامد  $A$  و  $B$  مستقلند  $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$

مثال: در پرتاب یک تاس، فرض کنیم پیشامد  $A$  ظاهر شدن عدد زوج، پیشامد  $B$  ظاهر شدن عددی بزرگتر از ۳ و پیشامد  $C$  ظاهر شدن عددی بزرگتر از ۲ باشد؛ مستقل یا وابسته بودن هر دو تا از این پیشامدها را بررسی کنید.

مثال: اگر  $A$  و  $B$  دو پیشامد مستقل باشند به طوری که  $P(A) = \frac{2}{5}$  و  $P(A \cup B) = \frac{1}{3}$  آنگاه  $P(B)$  را به دست آورید.

**نکته** از مستقل بودن هر کدام از ۴ حالت زیر، مستقل بودن ۳ حالت دیگر نتیجه می‌شود

$A \& B \leftrightarrow A' \& B \leftrightarrow A \& B' \leftrightarrow A' \& B'$

**EX**  $P(A \cap B') = P(A)P(B')$   $P(A' \cap B' \cap C) = P(A')P(B')P(C)$

**T** هرگاه  $A$  و  $B$  دو پیشامد مستقل باشند به طوری که  $P(A) = \frac{1}{4}$  و  $P(B) = \frac{1}{4}$  در این صورت حاصل  $P(A \cup B')$  کدام است؟  $\frac{1}{4}$  (۱)  $\frac{3}{4}$  (۲)  $\frac{5}{8}$  (۳)  $\frac{7}{8}$  (۴)

### آمار توصیفی (معیارهای گزایش به مرکز)

میانگین و میانه معیارهایی هستند که ممل تمرکز داده‌ها را به لحاظ مقداری و تدریج مشخص می‌کنند.

**میانگین** میانگین، ساده‌ترین و در عین حال پرکاربردترین شاخص مرکزی است. میانگین در واقع مرکزیت مقداری (مرکز ثقل) داده‌ها را تعیین می‌نماید.

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N}$$

**میانه** میانه، مرکزیت تعدادی داده‌ها را مشخص می‌کند. یعنی پس از مرتب کردن داده‌ها به ترتیب صعودی، میانه داده‌ای است که تعداد داده‌های قبل و بعد از آن با هم برابر باشد. میانه را با  $Q_p$  یا  $\tilde{X}$  (بخوانید ایکس مد) نشان می‌دهند.

۲۷

### پیشامدهای مستقل و قوانین احتمال

هرجا اشتراک دیدی ضرب بزار!

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) \quad P(A - B) = P(A) - P(A)P(B)$$

**T** احتمال قبولی شیدا در آزمون رانندگی  $0.4$  و همین احتمال برای شیرین  $0.7$  است. چقدر احتمال دارد حداقل یکی از آن‌ها در آزمون رانندگی قبول شود؟

$0.96(4) \quad 0.82(3) \quad 0.8(2) \quad 0.9(1)$

A

۱۲۶

مثال: میانه داده‌های  $۸۵, ۹۳, ۸۵, ۵۱$  را به دست آورید.

بریم سراغ پارک‌های اول و سوم! هرچند شافص پرانگیزی هستند، اما همینها می‌گویند!

**چارک اول** برای داده‌های مرتب شده قبل از میانه (خود میانه حساب نیست) یک میانه به به دست می‌آوریم، همان چارک اول است. چارک اول را با  $Q_1$  نشان می‌دهند.

**چارک سوم** برای داده‌های مرتب شده بعد از میانه (خود میانه حساب نیست) یک میانه به به دست می‌آوریم، همان چارک سوم است. چارک اول را با  $Q_3$  نشان می‌دهند.

**نکته** به میانه، پارک دوم هم می‌گویند و با  $Q_2$  هم نشان می‌دهند.

۲۹

### روش مناسب میانه

گام اول: ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم.

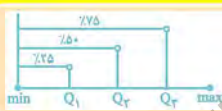
گام دوم: اگر فرض کنیم  $N$  تعداد داده‌هاست، شماره میانه می‌شود:  $\frac{N+1}{2}$

۱- اگر  $N$  فرد باشد، شماره میانه عددی رند می‌شود که در این حالت میانه، داده وسط و در واقع یکی از خود داده‌هاست.

۲- اگر  $N$  زوج باشد، شماره میانه غیررند می‌شود که در این حالت میانه می‌شود میانگین ۲ داده وسط. در این حالت ممکن است میانه از خود داده‌ها نباشد.

مثال: میانه داده‌های  $۵۱, ۶۳, ۵۴, ۹۶, ۹۵, ۷۵, ۸۵$  را به دست آورید.

۲۸



چارک اول و دوم و سوم را در نمودار روبه‌رو ببینید.

**T** در داده‌های آماری  $۱, ۲, ۳, ۳, ۳, ۴, ۴, ۴, ۴, ۴$ ، مجموع میانگین و میانه کدام است؟

$۸(4) \quad ۷(3) \quad ۶(2) \quad ۵(1)$

A

۳۰

مثال: معرل مرسی تدریجی نمره ۱۱ در نظر گرفته شده و تفاوت آن از یکایک نمرات ۵-، ۳-، ۲- و ۱- گرفته شده است. معرل واقعی نمرات کرام است؟

answer

### ویژگی های میانگین

۱- اگر داده ها را با عدد  $C$  جمع (یا تفریق) کنید، میانگین هم با همان عدد جمع (یا تفریق) می شود.

۲- اگر داده ها را در عدد  $K$  ضرب کنیم، میانگین هم  $K$  برابر می شود.

$$\bar{x}(Kx_i + c) = K\bar{x}x_i + c$$

(یعنی هر بلایی سر داده ها بیارید، سر میانگین و حتی پارک ها هم همون بلا میاردا)

۳- میانگین یا داده ها هم واحد است.

$$\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}) = 0 \quad \text{یعنی، مجموع "انحرافات داده ها از میانگین" صفر است.}$$

**T** میانگین داده های  $3x_1 - 2, 3x_2 - 2, \dots, 3x_n - 2$  برابر ۲۲ است.  $1(1) \quad 3(2)$

میانگین داده های  $\frac{x_1}{4} + 1, \frac{x_2}{4} + 1, \dots, \frac{x_n}{4} + 1$  کدام است؟  $5(3) \quad 4(4)$

A

۳۵

### معیارها (یا شاخص های) پراکندگی

دامنه تغییرات: دامنه تغییرات ساده ترین شاخص پراکندگی است که اختلاف بین بزرگ ترین و کوچک ترین داده ها

$$R = x_{\max} - x_{\min}$$

را مشخص می کند و با نماد  $R$  نشان داده می شود.

### ویژگی های دامنه تغییرات

۱- دامنه تغییرات، شاقصی سریع اما کم دقت برای بیان پراکندگی داده ها است.

از این جهت کم دقت است که مقدارش فقط به  $x_{\max}$  و  $x_{\min}$  وابسته است و با تغییر تعداد و

مقدار داده های میانی، مقدار آن تغییر نخواهد کرد.

تنیقه: در صورت وجود داده های دور افتاده، استفاده از دامنه تغییرات به عنوان معیاری برای بیان میزان

پراکندگی داده ها اصلا مناسب نیست.

۲- اگر به همی داده ها مقدار ثابت  $K$  اضافه کنید،  $R$  تغییری نخواهد کرد. (با عقل جور درمی آید! وقتی همه داده ها را

با یک عدد ثابت جمع می کنید، پراکندگی آن ها نسبت به هم نیایر تغییر کنه!)

۳- اگر داده ها را  $m$  برابر کنید، دامنه  $|m|$  برابر می شود. (چون هم  $x_{\max}$  در  $m$  ضرب می شود هم  $x_{\min}$ )

$$R_{mx_i + k} = |m| \times R_{x_i}$$

۵- دامنه تغییرات هم واحد داده ها است. (یعنی اگر مثلا داده ها کمیتی طولی یا واحد متر باشند، دامنه تغییرات هم یک

کمیت طولی یا واحد متر خواهد بود.)

۶- اگر چند داده برابر باشند  $R = 0$  و اگر برای چند داده  $R = 0$  یعنی داده ها با هم برابرند.

**واریانس ( $\sigma^2$ ، پخواتید سیگما دو)** تعریف واریانس: می شود میانگین هموز انحرافات از میانگین. داریم:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N} = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_N - \bar{x})^2}{N}$$

کام اول: میانگین داده ها را به دست بیار.

کام دوم: انحراف داده ها از میانگین را حساب کن.  $(x_i - \bar{x})$

کام سوم: انحرافات را به توان ۲ برسان.  $(x_i - \bar{x})^2$

کام چهارم: میانگین داده های کام سوم (هموز اختلاف داده ها از میانگین) را حساب کن، همان واریانس داده ها است.

مثال: واریانس داده های ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ را حساب کنید.

answer

### ویژگی های واریانس

۱- اگر چند داده با هم برابر باشند، واریانس آن ها صفر است و اگر واریانس چند داده صفر باشد، آن چند داده یا هم برابرند.

۲- اگر داده های آماری را با عدد ثابتی جمع (یا تفریق) کنید، واریانس این داده ها تغییری نخواهد کرد. به عبارت دیگر:

$$\sigma^2_{x_i+k} = \sigma^2_{x_i}$$

۳- اگر داده ها را در عدد ثابت  $m$  ضرب کنید، واریانس در  $m^2$  ضرب می شود. به عبارت دیگر:

$$\sigma^2_{mx_i} = (m)^2 \sigma^2_{x_i}$$

$$\sigma^2_{mx_i+k} = m^2 \sigma^2_{x_i}$$

۵- واهر واریانس برابر با توان دوم واهر داده مورد نظر است.

۶- واریانس بزرگ نشان دهنده دور بودن داده ها از میانگین و واریانس کوچک نشان دهنده نزدیکی بودن داده ها به میانگین است و واریانس صفر هم (همان طور که اشاره شد) نشان دهنده برابری داده ها است. پس واریانس معیار خوبی برای سنجش پراکندگی و تغییر پذیری داده ها نسبت به میانگین است.

### انحراف معیار ( $\sigma$ ، بخوانید سیگما)

چتر مثبت واریانس است. پس برای مناسبه آن کافی است واریانس را مناسبه کنید، بعد از آن چتر بگیرید.

فرمول مناسبه انحراف معیار

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

مثال: اگر واریانس داده های  $b_i$  برابر ۱۸ باشد و داشته باشیم  $b_i = (-3a_i) + 4$  ، واریانس داده های  $(2a_i) - 5$  کرام است؟

answer

### ویژگی های انحراف معیار

۱- اگر انحراف معیار چند داده صفر باشد، یعنی داده ها برابرند و برعکس. (یعنی اگر چند داده برابر باشند، انحراف معیار آن ها صفر است).

۲- اگر داده ها را با عدد  $k$  جمع (یا تفریق) کنیم، انحراف معیار تغییری نمی کند.  $\sigma_{x_i+k} = \sigma_{x_i}$

۳- اگر داده ها را در عدد  $m$  ضرب کنیم، انحراف معیار در  $|m|$  ضرب می شود. (به این دلیل در  $|m|$

ضرب می شود که انحراف معیار، چتر مثبت واریانس است و بنابراین مقدار آن همیشه بزرگ تر یا مساوی صفر

$$\sigma_{mx_i} = |m| \sigma_{x_i} \text{ (است.)}$$

$$\sigma_{mx_i+k} = |m| \sigma_{x_i}$$

۵- واهر انحراف معیار از چنس واهر داده ها است.

۶- مقدار انحراف معیار هر چه بزرگ تر باشد، یعنی پراکندگی داده ها حول میانگین پیش تر و هر چه مقدارش کم تر باشد، یعنی پراکندگی داده ها نسبت به میانگین کم تر است. اما عددی که انحراف معیار می دهد، از عدد واریانس معقول تر و منطقی تر است.

مثال: اگر انحراف معیار داده‌های  $2, -\frac{1}{4}x_1 + 2, -\frac{1}{4}x_2 + 2, \dots, -\frac{1}{4}x_n + 2$  برابر باشد، انحراف معیار داده‌های  $1 - 5x_1 - 1, 5x_2 - 1, \dots, 5x_n - 1$  را به دست بیاورید تو دل‌با!

**answer**

**ضریب تغییرات**

برابر است با نسبت انحراف معیار به میانگین. یعنی:  $CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$

ضریب تغییرات معمولاً به صورت درصد بیان می‌شود. ضریب تغییرات واحد اندازه‌گیری ندارد. (چون واحدهای  $\sigma$  و  $\bar{x}$  با هم برابرین و از صورت و مخرج ساده میشن.)

**ویژگی‌های ضریب تغییرات**

۱- ضریب تغییرات مقسوم‌بر داده‌های مثبت است.

۲- اگر داده‌ها برابر باشند، ضریب تغییرات صفر است. (چون  $\sigma = 0$ ) و اگر ضریب تغییرات چند داده صفر باشد، داده‌ها برابرند.

۳- اگر داده‌ها را در عدد ثابت  $m$  ضرب کنیم، ضریب تغییرات تغییری نخواهد کرد. چون هم  $\sigma$  در  $m$  ضرب می‌شود، هم  $\bar{x}$  پس:  $CV_{mx_i} = CV_{x_i}$

۴- اگر داده‌ها را با عدد ثابت  $k$  جمع کنیم،  $CV$  به صورت منظم تغییر نمی‌کند. چون صورت آن ( $\sigma$ ) بدون تغییر باقی می‌ماند و مخرجش ( $\bar{x}$ ) تغییر می‌کند و با  $k$  جمع می‌شود.

توجه: اگر داده‌ها را با عدد ثابت  $k$  ( $k > 0$ ) جمع (تفریق) کنیم،  $CV$  کاهش (افزایش) می‌یابد.

۵- به طور کلی می‌توان گفت:  $CV_{mx_i \pm k} = \frac{|m|\sigma_{x_i}}{(\bar{mx}) \pm k}$

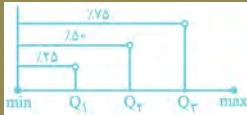
۶- اینکه  $CV$  به واحد اندازه‌گیری داده‌ها بستگی ندارد (چون واحد ندارد) یک مزیت برای این شاخص به حساب می‌آید. چون تحت شرایطی که داده‌های مربوط به کمیت در دو جامعه با واحدهای متفاوت بیان شده باشد و یا داده‌ها با واحدهایی که نمی‌شناسیم ارائه شده باشند، می‌توان برای مقایسه پراکندگی داده‌ها در دو گروه داده از آن استفاده کرد. (مثلاً برای مقایسه پراکندگی اعداد مربوط به قر کلاس **A** با وزن کلاس **B** یا مثلاً برای مقایسه شدت نور در دو آزمایش مختلف که با واحد کاندلا (**Candela**) بیان شده‌اند که برای ما ملموس نیست.)

مثال: ضریب تغییرات سن دانش‌آموزان کلاس شما ۱۰ سال بعد چه تغییری خواهد کرد؟

**answer**



چارک‌ها (همان چهار یک به معنی ربع است، فرنگی آن می‌شود Quarter)



چارک اول و دوم و سوم را در نمودار رویه‌رو ببینید.

روش محاسبه چارک‌ها

گام اول: ابتدا میانه (همان  $Q_2$  یا  $\tilde{x}$ ) را به دست آورید.

گام دوم: سپس برای داده‌های مرتب شده قبل از میانه (فقر میانه حساب نیست) یک میانه به دست بیاورید و آن را چارک اول بنامید. ( $Q_1$ )

گام سوم: برای داده‌های مرتب شده بعد از میانه (فقر میانه حساب نیست) یک میانه به دست آورید و آن را چارک سوم بنامید. ( $Q_3$ )

مثال: چارک‌های اول و دوم و سوم را در هر مورد، به دست آورید.

(الف) ۳ و ۸ و ۱۱ و ۱۲ و ۱۳ و ۲۱ و ۲۳ (ب) ۳ و ۸ و ۱۱ و ۱۲ و ۱۳ و ۲۱ و ۲۳

answer

۱- (تمرین کتاب) احمد به احتمال  $\frac{7}{8}$  در تیم کوهنوردی مدرسه‌اش و به احتمال  $\frac{1}{8}$  در تیم ملی فوتبال نوجوانان انتخاب می‌شود. احتمال‌های زیر را محاسبه کنید.  
(الف) در هر دو تیم مورد نظر انتخاب شود. (ب) در هیچ کدام از دو تیم انتخاب نشود.  
(پ) فقط در تیم ملی انتخاب شود. (ت) فقط در یکی از تیم‌ها انتخاب شود. (ث) حداقل در یکی از تیم‌ها انتخاب شود.

۲- (کتاب درسی) احتمال این که رویا در درس ریاضی قبول شود، دو برابر احتمال آن است که دوستش در این درس قبول شود. اگر احتمال این که حداقل یکی از آن‌ها در درس ریاضی قبول شوند، برابر  $\frac{625}{625}$  باشد، رویا با چه احتمالی در این درس قبول خواهد شد؟

answer

۳- (کتاب درسی) دو تاس با هم پرتاب شده‌اند. احتمال آن که هر دو عدد زوج باشد، به شرط اینکه بدانیم مجموع اعداد رو شده برابر ۸ است را به دست آورید.

answer

۴- کتاب درسی، ترکیبی از ۶ ماده شیمیایی داریم که دو تا از آن‌ها مواد **A** و **B** هستند. احتمال واکنش نشان دادن ماده **A**  $\frac{1}{5}$  و احتمال واکنش نشان دادن ماده **B**  $\frac{1}{4}$  است. اگر ماده **A** واکنش دهد، احتمال واکنش نشان دادن ماده **B**  $\frac{1}{4}$  خواهد شد. با چه احتمالی حداقل یکی از مواد **A** یا **B** واکنش نشان خواهد داد؟

**answer**

۵- (تمرین کتاب) درستی یا نادرستی جمله‌های زیر را مشخص کنید.

(الف) اگر مقدار ثابت **C** از داده‌ها کم شود، انحراف معیار به اندازه  $\sqrt{C}$  کاهش می‌یابد.

(ب) اگر مقدار ثابت **C** به داده‌ها اضافه شود، ضریب تغییرات بزرگتر می‌شود.

(پ) اگر مقدار ثابت  $\frac{1}{C}$  در داده‌ها ضرب شود، انحراف معیار  $\frac{1}{C}$  برابر می‌شود.

(ث) اگر مقدار ثابت **C** در داده‌ها ضرب شود، ضریب تغییرات ثابت می‌ماند.

۸- (امتحانات سال گذشته) احتمال برد استقلال در برابر پرسپولیس  $\frac{7}{10}$  است. اگر هنگام بازی یک تاس و یک سکه هم پیاپرزیم. احتمال برد استقلال و رو آمدن سکه و کمتر از ۵ آمدن تاس چند است؟

**answer**

۹- (امتحانات سال گذشته) اختلاف پنج داده آماری از میانگین آن‌ها برابر ۳ و ۲- و ۴- و ۱- و ۱ می‌باشد. واریانس این پنج داده آماری را به دست آورید.

**answer**

۱۰- (امتحانات سال گذشته) اگر **A** و **B** دو پیشامد مستقل باشند، به طوری که  $p(A|B) = \frac{1}{4}$  و  $p(B) = \frac{1}{4}$ ، آنگاه  $p(A \cup B)$  را بیابید.

**answer**

۱۱- (امتحانات سال گذشته) یک تاس و یک سکه را با هم پرتاب می‌کنیم؛ پیشامد **A** که در آن تاس عدد فرد بیاید را مشخص کنید.

پیشامد **B** که در آن سکه دروه و تاس عدد کوچکتر از ۵ بیاید را مشخص کنید. آیا این دو پیشامد مستقلند؟ چرا؟

